HOCHHEIM

AUFGABEN AUS DER ANALYTISCHEN GEOMETRIE DER EBENE

III

B: AUFLÖSUNGEN

P. P.

Meinen umfangreichen Verlag auf dem Gebiete der **Mathematischen**, der **Technischen** und **Naturwissenschaften** nach allen Richtungen hin weiter auszubauen, ist mein stetes durch das Vertrauen und Wohlwollen zahlreicher hervorragender Vertreter obiger Gebiete von Erfolg begleitetes Bemühen, wie mein Verlagskatalog zeigt, und ich hoffe, daß bei gleicher Unterstützung seitens der Gelehrten und Schulmänner des In- und Auslandes auch meine weiteren Unternehmungen Lehrenden und Lernenden in Wissenschaft und Schule jederzeit förderlich sein werden. **Verlagsanerbieten** gediegener Arbeiten auf einschlägigem Gebiete werden mir deshalb, wenn auch schon gleiche oder ähnliche Werke über denselben Gegenstand in meinem Verlage erschienen sind, stets sehr willkommen sein.

Unter meinen zahlreichen Unternehmungen mache ich ganz besonders auf die von den Akademien der Wissenschaften zu München und Wien und der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen herausgegebene **Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften** aufmerksam, die in 7 Bänden die Arithmetik und Algebra, die Analysis, die Geometrie, die Mechanik, die Physik, die Geodäsie und Geophysik und die Astronomie behandelt und in einem Schlußband historische, philosophische und didaktische Fragen besprechen, sowie ein Generalregister zu obigen Bänden bringen wird.

Weitester Verbreitung erfreuen sich die mathematischen und naturwissenschaftlichen Zeitschriften meines Verlags, als da sind: Die **Mathematischen Annalen**, die **Bibliotheca Mathematica**, das **Archiv der Mathematik und Physik**, die **Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung**, die **Zeitschrift für Mathematik und Physik**, Organ für angewandte Mathematik, die **Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht**, ferner **Natur und Schule**, Zeitschrift für den gesamten naturkundlichen Unterricht aller Schulen, die **Geographische Zeitschrift** u. a.

Seit 1868 veröffentliche ich in kurzen Zwischenräumen: **„Mitteilungen der Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner“**. Diese „Mitteilungen“, welche unentgeltlich in 25 000 Exemplaren sowohl im In- als auch im Auslande von mir verbreitet werden, sollen das Publikum, welches meinem Verlage Aufmerksamkeit schenkt, von den erschienenen, unter der Presse befindlichen und von den vorbereiteten Unternehmungen des Teubnerschen Verlags in Kenntnis setzen und sind ebenso wie das bis auf die Jüngstzeit fortgeführte jährlich zwei- bis dreimal neu gedruckte **Verzeichnis des Verlags von B. G. Teubner auf dem Gebiete der Mathematik, der Technischen und Naturwissenschaften nebst Grenzgebieten**, 96. Ausgabe [XL u. 168 S. gr. 8], sowie der Nachtrag 1901—1903 [XII u. 56 S.] zu diesem Katalog in allen Buchhandlungen unentgeltlich zu haben, werden auf Wunsch aber auch unter Kreuzband von mir unmittelbar an die Besteller übersandt.

Leipzig, Poststraße 3.

B. G. Teubner.

AUFGABEN

AUS DER

ANALYTISCHEN GEOMETRIE

DER EBENE

VON

DR. ADOLF HOCHHEIM,
PROFESSOR.

HEFT III.

DIE KEGELSCHNITTE.

ABTEILUNG II.

B. AUFLÖSUNGEN.

LEIPZIG,
VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1886.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Projektivische Strahlenbüschel in einer Ebene.

1. Die Koordinaten sind:

$$x = -\frac{\begin{vmatrix} N_1 + fN_2 & M_1 + fM_2 \\ N'_1 + kN'_2 & M'_1 + kM'_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L_1 + fL_2 & M_1 + fM_2 \\ L'_1 + kL'_2 & M'_1 + kM'_2 \end{vmatrix}}, \quad y = -\frac{\begin{vmatrix} L_1 + fL_2 & N_1 + fN_2 \\ L'_1 + kL'_2 & N'_1 + kN'_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L_1 + fL_2 & M_1 + fM_2 \\ L'_1 + kL'_2 & M'_1 + kM'_2 \end{vmatrix}}, \text{ oder}$$

$$x = -\frac{kf(M_2N'_2 - M'_2N_2) + k(M_1N'_2 - M'_2N_1) + f(M_2N'_1 - M'_1N_2) + M_1N'_1 - M'_1N_1}{kf(M_2L'_2 - M'_2L_2) + k(M_1L'_2 - M'_2L_1) + f(M_2L'_1 - M'_1L_2) + M_1L'_1 - M'_1L_1},$$

$$y = -\frac{kf(L_2N'_2 - L'_2N_2) + k(L_1N'_2 - L'_2N_1) + f(L_2N'_1 - L'_1N_2) + L_1N'_1 - L'_1N_1}{kf(L_2M'_2 - L'_2M_2) + k(L_1M'_2 - L'_2M_1) + f(L_2M'_1 - L'_1M_2) + L_1M'_1 - L'_1M_1}.$$

Beispiel. $x = \frac{29kf - 16k - 13f + 7}{5kf + 8k + 26f - 23}$,

$$y = -\frac{3kf + 36k - 39f - 6}{5kf + 8k + 26f - 23}.$$

2. f und k müssen einer Gleichung von der Form

$$fk + af + bk + c = 0$$

genügen, in der a, b, c Konstante sind.

3. Da in diesem Falle für $f = 0$ auch $k = 0$, ferner für $f = \infty$ auch $k = \infty$ werden muß, so kann die Parametergleichung nur die Form

$$af + bk = 0$$

besitzen.

4. Nach der Voraussetzung müssen die Parameter zwei Relationen von der Form

$$f_1k + a_1f_1 + b_1k + c_1 = 0,$$
$$f_2k + a_2f_2 + b_2k + c_2 = 0$$

genügen. Eliminiert man aus diesen Gleichungen k, so ergiebt sich

$$(a_1 - a_2)f_1f_2 + (c_1 - a_2b_1)f_2 - (c_2 - a_1b_2)f_1 - (b_1c_2 - b_2c_1) = 0,$$

woraus die Richtigkeit der Behauptung erhellt.

5. $19x - 27y + 22 = 0$.

6. Die Koordinaten der Mittelpunkte der Büschel sind:

$$x_1 = 4, \; y_1 = 5; \quad x_2 = 9, \; y_2 = -1;$$

demnach die Gleichung der Verbindungslinie derselben

$$5y + 6x - 49 = 0.$$

Wird diese Verbindungslinie dem ersten Büschel zugerechnet, so entspricht ihr im zweiten der Strahl

$$46y - 265x + 2431 = 0;$$

gehört dagegen die Verbindungslinie dem zweiten Büschel an, so entspricht ihr der Strahl

$$186y - 97x - 542 = 0$$

des ersten Büschels.

7. Die Koordinaten der Schnittpunkte sind bestimmt durch die beiden Gleichungen

$$L_1 L'_1 - a L_1 L'_2 - b L_2 L'_1 + c L_2 L'_2 = 0,$$
$$L_3 = 0.$$

Da die erste derselben in Bezug auf x und y vom zweiten Grade ist, so werden im allgemeinen zwei Schnittpunkte entsprechender Strahlen auf $L_3 = 0$ liegen.

8. $$x_{\frac{1}{2}} = \frac{-10 \pm 2i\sqrt{51}}{19}, \; y_{\frac{1}{2}} = 0.$$

Die Schnittpunkte sind in diesem Falle imaginär.

9. Die Schnittpunkte der zugeordneten Strahlen müssen auf der unendlich fernen Geraden liegen. Es ergeben sich demnach zwei Strahlenpaare, deren Gleichungen sind:

$$43x - 5y - 7 = 0, \qquad 43x - 5y - 14 = 0;$$
$$2x - 2y + 1 = 0, \qquad 13x - 13y - 6 = 0.$$

10. Sind f_1, f_2, f_3, f_4 die Parameter von vier Strahlen des ersten Büschels, so ist das Doppelverhältnis derselben:

$$\frac{f_1 - f_3}{f_2 - f_3} : \frac{f_1 - f_4}{f_2 - f_4} = \frac{-\frac{bk_1 + c}{k_1 + a} + \frac{bk_3 + c}{k_3 + a}}{-\frac{bk_2 + c}{k_2 + a} + \frac{bk_3 + c}{k_3 + a}} : \frac{-\frac{bk_1 + c}{k_1 + a} + \frac{bk_4 + c}{k_4 + a}}{-\frac{bk_2 + c}{k_2 + a} + \frac{bk_4 + c}{k_4 + a}}$$

$$= \frac{(k_1 - k_3)(c - ab)}{(k_2 - k_3)(c - ab)} : \frac{(k_1 - k_4)(c - ab)}{(k_2 - k_4)(c - ab)},$$

woraus die Richtigkeit der Behauptung erhellt.

11. Aus der vorhergehenden Lösung folgt, daß drei Strahlen des zweiten Büschels bekannt sein müssen.

12. Bezeichnen wir die Konstanten der Parametergleichung mit a, b und c, so können wir zur Bestimmung derselben die Gleichungen

$$f_1k_1 + af_1 + bk_1 + c = 0,$$
$$f_2k_2 + af_2 + bk_2 + c = 0,$$
$$f_3k_3 + af_3 + bk_3 + c = 0$$

aufstellen.

Eliminieren wir aus diesen und der Gleichung

$$fk + af + bk + c = 0$$

die Größen a, b, c, so ergiebt sich die Parametergleichung:

$$\begin{vmatrix} f_1k_1 & f_1 & k_1 & 1 \\ f_2k_2 & f_2 & k_2 & 1 \\ f_3k_3 & f_3 & k_3 & 1 \\ fk & f & k & 1 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$(k_1 - k_2)(f_2 - f_3)(k_3 - k)(f - f_1)$$
$$- (f_1 - f_2)(k_2 - k_3)(f_3 - f)(k - k_1) = 0.$$

13. Sind die Gleichungen der beiden projektivischen Strahlenbüschel

$$L_1x + M_1y + N_1 + f(L_2x + M_2y + N_2) = 0,$$
$$L'_1x + M'_1y + N'_1 + k(L'_2x + M'_2y + N'_2) = 0$$

und die Parametergleichung

$$fk + af + bk + c = 0,$$

so lassen sich zur Bestimmung der Parameter der betreffenden Strahlen folgende Gleichungen aufstellen:

$$-\frac{L_1 + f_1L_2}{M_1 + f_1M_2} = \frac{M_1 + f_2M_2}{L_1 + f_2L_2},$$
$$-\frac{L'_1 + k_1L'_2}{M'_1 + k_1M'_2} = \frac{M'_1 + k_2M'_2}{L'_1 + k_2L'_2},$$
$$k_1f_1 + af_1 + bk_1 + c = 0,$$
$$k_2f_2 + af_2 + bk_2 + c = 0.$$

Da man durch Vertauschung von f_1 und f_2, ferner von k_1 und k_2 zu denselben Gleichungen gelangt, so folgt, daß in jedem Büschel nur ein Strahlenpaar vorhanden ist, welches der Anforderung genügt. Dieselben sind stets reell, wie sich aus der resultierenden Gleichung zweiten Grades ergiebt.

14. Die beiden Strahlen des ersten Büschels entsprechen der Gleichung

$$2y - x - 6 + \frac{5}{32}\left(3 \pm \sqrt{\frac{629}{13}}\right)(3y - 2x - 7) = 0,$$

dagegen die des zweiten Büschels der Gleichung

$$y + 2x - 17 + \frac{5}{64}\left(3 \pm \sqrt{\frac{629}{13}}\right)(2y - 3x + 29) = 0.$$

15. Betrachten wir die Schenkel der entsprechenden rechten Winkel in beiden Büscheln als Fundamentalstrahlen und bezeichnen die Gleichungen derselben mit

$$L_1 = 0,\ L_2 = 0;\ L'_1 = 0,\ L'_2 = 0,$$

so sind die Gleichungen von zwei entsprechenden Strahlenpaaren

$$\begin{cases} L_1 + f_1 L_2 = 0, \\ L'_1 + k_1 L'_2 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} L_1 + f_2 L_2 = 0, \\ L'_1 + k_2 L'_2 = 0. \end{cases}$$

Nach Auflösung 10, ist nun

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{k_1}{k_2}.$$

Führt man statt der Parameter die gleichwertigen Verhältnisse der Sinusse ein (vergl. Heft I, Aufl. 229), und bezeichnet den Winkel zwischen $L_1 = 0$ und $L_1 + f_1 L_2 = 0$ mit α_1, den zwischen $L_1 = 0$ und $L_1 + f_2 L_2 = 0$ mit α_2, ferner den zwischen $L'_2 = 0$ und $L'_1 + k_1 L'_2 = 0$ mit β_1, und endlich den zwischen $L'_2 = 0$ und $L'_1 + k_2 L'_2 = 0$ mit β_2, so findet man leicht, daß

$$\operatorname{tg} \alpha_1 \cdot \operatorname{tg} \beta_1 = \operatorname{tg} \alpha_2 \cdot \operatorname{tg} \beta_2$$

ist.

16. $$L_1 + f L_2 = 0,\ L_1 + k L'_2 = 0.$$

Die beiden Strahlenbüschel befinden sich in diesem Falle in perspektivischer Lage.

17. Da zwei einander entsprechende Strahlen zusammenfallen, so werden im allgemeinen nur noch zwei zugeordnete Strahlen vorhanden sein können, die einander parallel laufen. Man erhält dieselben, wenn man setzt:

$$f = -\frac{a(L_1 M'_2 - L'_2 M_1) - b(L_2 M_1 - L_1 M_2)}{a(L_2 M'_2 - L'_2 M_2)},$$

$$k = \frac{a(L_1 M'_2 - L'_2 M_1) - b(L_2 M_1 - L_1 M_2)}{b(L_2 M'_2 - L'_2 M_2)}.$$

Beispiel. $f = 7$, $k = \frac{7}{2}$. Demnach sind die Gleichungen der parallelen Strahlen:

$$15y + 5x - 4 = 0,$$
$$9y + 3x + 13 = 0$$

18. Die Bedingungsgleichungen sind:

$$\begin{vmatrix} L_2 & L'_2 \\ M_2 & M'_2 \end{vmatrix} = 0, \qquad a \begin{vmatrix} L_1 & L'_2 \\ M_1 & M'_2 \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ M_1 & M_2 \end{vmatrix} = 0.$$

19. Man erhält

$$f_1 = 3 \quad , \quad f_2 = \tfrac{1}{2} \quad , \quad f_3 = 7,$$

demnach ist das Produkt

$$(f_1 - f_2)(f_2 - f_3)(f_3 - f_1) = -65.$$

Das Büschel hat also eine Drehung im negativen Sinne.

20. Sind $V_1 + f_1 V_2 = 0$, $V_1 + f_2 V_2 = 0$, $V_1 + f_3 V_2 = 0$, $V_1 + f_4 V_2 = 0$ die vier Strahlen des Büschels, so ist das Doppelverhältnis derselben

$$\frac{f_1 - f_3}{f_1 - f_4} : \frac{f_2 - f_3}{f_2 - f_4}.$$

Führt man die Drehung aus, so hat man an Stelle von f zu setzen $\dfrac{\alpha + \beta h}{\gamma + \alpha h}$, wo $\alpha = \sin \varphi$, $\beta = \sin(\varphi - \varepsilon)$, $\gamma = \sin(\varphi + \varepsilon)$, wenn ε der Winkel ist, welchen die beiden Fundamentalstrahlen miteinander einschließen. Die Gleichung des Büschels ist dann

$$\gamma V_0 + \alpha V_1 + h(\alpha V_0 + \beta V_1) = 0.$$

Man findet nun mit Leichtigkeit, daß

$$\frac{f_1 - f_3}{f_1 - f_4} : \frac{f_2 - f_3}{f_2 - f_4} = \frac{h_1 - h_3}{h_1 - h_4} : \frac{h_2 - h_3}{h_2 - h_4}$$

ist, d. h. daß bei der Drehung das Doppelverhältnis der vier Strahlen unverändert bleibt.

21. Um die Gleichung des Büschels in seiner neuen Lage zu bestimmen, hat man an Stelle von x und y lineare Ausdrücke einzuführen, durch welche nur die Gleichungen der Fundamentalstrahlen, aber nicht die Beziehung zwischen den Parametern geändert wird.

22. Sind die Gleichungen der Büschel

$$L_1 + f L_2 = 0, \qquad L_1 + k L'_2 = 0$$

und die Parametergleichung

$$af + bk = 0,$$

so erhält man die Gleichung des geometrischen Ortes durch Elimination von f und k aus diesen beiden Gleichungen, nämlich

$$L_1 (a L'_2 + b L_2) = 0.$$

Die Schnittpunkte liegen also auf einer Geraden, deren Gleichung

$$a L'_2 + b L_2 = 0$$

ist. Diese Gerade wird die perspektivische Achse der beiden Büschel genannt.

Beispiel. $20x + 19y - 17 = 0$.

23. Es seien a_1, b_1, c_1 die Strahlen des ersten, a_2, b_2, c_2 die entsprechenden Strahlen des zweiten Büschels, die Mittelpunkte O_1 und O_2. Soll zu dem Strahle d_1 des ersten Büschels der entsprechende des zweiten gefunden werden, so dreht man zunächst das zweite Büschel so um O_2, daß a_2 in der neuen Lage a_1 parallel läuft, und zieht sodann durch einen beliebigen Punkt O'_2 des Strahles a_1 Parallelen zu b_2 und c_2, nämlich b'_2 und c'_2. Durch die Schnittpunkte von b_1 und b'_2, ferner von c_1 und c'_2 ist die Lage der perspektivischen Achse g der beiden Büschel um O_1 und O'_2 bestimmt. Verbindet man nun den Schnittpunkt von d_1 und g mit dem Punkte O'_2, zieht durch O_2 zu dieser Verbindungslinie eine Parallele und dreht das zweite Büschel um O_2 in seine ursprüngliche Lage zurück, so ist die Richtung von d_2 genau bestimmt.

24. Es sei die Bezeichnung der Strahlen dieselbe wie in der vorhergehenden Lösung. Man konstruiert zunächst (siehe die vorhergehende Lösung) ein Hilfsbüschel, welches dem zweiten kongruent ist und sich mit dem ersten in perspektivischer Lage befindet. Sodann errichtet man in dem Halbierungspunkte der Strecke $O_1 O'_2$ ein Lot, welches die perspektivische Achse im Punkte M schneiden möge. Beschreibt man um M einen Kreis, welcher durch O_1 und O'_2 geht, und verbindet die Schnittpunkte des Kreises und der perspektivischen Achse mit O_1 und O'_2, so ist die Aufgabe für die beiden Büschel, welche sich in perspektivischer Lage befinden, gelöst. Die Lage der entsprechenden Strahlen in dem Büschel um O_2 läßt sich sodann leicht bestimmen.

25. $\quad h_1 L'_1 \equiv L_1 + f_1 L_2 = 0, \quad h_2 L'_2 \equiv L_1 + f_2 L_2 = 0.$

26. Wird der gegebene Strahl dem ersten Büschel zugerechnet, so entspricht ihm im zweiten der Strahl

$$13x - 5y - 57 = 0,$$

wird er dagegen dem zweiten Büschel zugerechnet, so entspricht ihm im ersten

$$185x + 191y - 549 = 0.$$

27. Es ist

$$L'_1 + kL'_2 \equiv L_1 + \frac{h_2 f_1 + h_1 f_2 k}{h_2 + h_1 k} L_2 = 0.$$

Die Werte der konstanten Größen h_1, h_2, f_1, f_2 lassen sich leicht bestimmen.

28. Ist $L'_1 \equiv \frac{L_1 + m_1 L_2}{h_1} = 0$, ferner $L'_2 \equiv \frac{L_1 + m_2 L_2}{h_2} = 0$, so ist die Gleichung des zweiten Büschels

$$L_1 + \frac{h_2 m_1 + k h_1 m_2}{h_2 + k h_1} L_2 = 0.$$

Das Produkt, durch welches der Sinn, in welchem sich das zweite Büschel dreht, bestimmt wird, läßt sich demnach in die Form

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^3 \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^3 (m_1 - m_2)^3 (f_1 - f_2)(f_2 - f_3)(f_3 - f_1)}{\left(1 - \frac{a}{b}\frac{h_1}{h_2} f_1\right)^2 \left(1 - \frac{a}{b}\frac{h_1}{h_2} f_2\right)^2 \left(1 - \frac{a}{b}\frac{h_1}{h_2} f_3\right)^2}$$

bringen. Besitzt daher das Produkt

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{h_1}{h_2} (m_1 - m_2)$$

einen positiven Wert, so drehen sich beide Büschel in demselben Sinne; besitzt es dagegen einen negativen Wert, so drehen sich dieselben im entgegengesetzten Sinne.

29. Beispiel 1. Es ist $\frac{a}{b} \cdot \frac{h_1}{h_2} (m_1 - m_2) = -\frac{1}{45}$.

Die beiden Strahlenbüschel drehen sich also im entgegengesetzten Sinne.

Beispiel 2. Die beiden Büschel drehen sich in demselben Sinne, da

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{h_1}{h_2} (m_1 - m_2) = \frac{1}{2}$$

ist.

30. Die Parameter der Doppelstrahlen sind gleich den Wurzeln der Gleichung

$$t - \frac{h_2 m_1 - \frac{a}{b} h_1 m_2 t}{h_2 - \frac{a}{b} h_1 t} = 0,$$

nämlich

$$t_1 = \frac{h_2 + \frac{a}{b} h_1 m_2 \pm \sqrt{(h_2 - \frac{a}{b} h_1 m_2)^2 - 4\left(\frac{a}{b}\right) h_1 h_2 (m_1 - m_2)}}{2\left(\frac{a}{b}\right) h_1}$$

Daraus folgt: Die beiden Strahlenbüschel können höchstens zwei Doppelstrahlen besitzen. Drehen sich die Büschel im entgegengesetzten Sinne, so sind beide Doppelstrahlen reell und liegen getrennt. Drehen sich dagegen die Büschel in demselben Sinne, so sind die beiden Doppelstrahlen entweder reell oder imaginär, und zwar können dieselben, wenn sie reell sind, entweder getrennt liegen oder zusammenfallen.

31. Die beiden Büschel drehen sich im entgegengesetzten Sinne und haben die beiden reellen Doppelstrahlen

$$138(17x + 9y - 59) + (-307 \pm \sqrt{112549})(3x + 2y - 10) = 0.$$

32. Die beiden Strahlenbüschel drehen sich in demselben Sinne und haben die beiden reellen Doppelstrahlen

$$33x + 2y + 7 = 0, \quad 3x - 5y + 5 = 0.$$

33. Es seien r_1 und ϱ_2 zwei nicht entsprechende Schenkel der entsprechenden rechten Winkel, d_1 und d_2 die beiden Doppelstrahlen, ferner mögen d_1 und r_1 den Winkel α, r_1 und ϱ_2 den Winkel φ und ϱ_2 und d_2 den Winkel β einschließen, dann ist nach Aufl. 15

$$\operatorname{tg} \alpha \,.\, \operatorname{tg} (\varphi \pm \alpha) = \operatorname{tg} \beta \,.\, \operatorname{tg} (\varphi \pm \beta)$$

oder

$$\{\pm (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta) + \operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \alpha \,.\, \operatorname{tg} \beta \,.\, \operatorname{tg} \varphi\} \; \{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta\} = 0.$$

Daraus folgt

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta,$$

d. h. der Strahl, welcher den Winkel der beiden nicht entsprechenden Schenkel entsprechender rechten Winkel halbiert, halbiert auch den Winkel, welchen die beiden Doppelstrahlen miteinander einschließen.

34. Sind $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ die Gleichungen der Doppelstrahlen, so müssen die Gleichungen der Büschel

$$L_1 + fL_2 = 0, \quad L_1 + afL_2 = 0$$

sein, wo a eine konstante Größe ist.

35. Nach der Erklärung Heft I, S. 34 ist der Wert des Doppelverhältnisses $= \frac{1}{a}\cdot$ Das Doppelverhältnis von je zwei beliebigen entsprechenden Strahlen zu den beiden Doppelstrahlen hat demnach einen konstanten Wert.

36. Man erhält:

$$3x - 4y + 10 + \frac{1 \pm \sqrt{401}}{8}(x + y - 2) = 0,$$

$$3x - 4y + 10 - \frac{1 \pm \sqrt{401}}{4}(x + y - 2) = 0.$$

37. Die Relation ist

$$fk + a(f + k) + b = 0.$$

Die beiden Strahlenbüschel sind also in Involution. (Vergl. Heft I, Aufg. und Aufl. 270.)

38. Sind r_1 und ϱ_2 zwei nicht entsprechende Schenkel der entsprechenden rechten Winkel, s_1 und s_2 zwei beliebige einander entsprechende Strahlen, und bezeichnen wir den Winkel zwischen s_1 und r_1 mit α, den zwischen ϱ_2 und s_2 mit β und endlich den zwischen r_1 und ϱ_2 mit φ, so muß

$$\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\beta + \varphi)\operatorname{tg}(\alpha + \varphi),$$

also $\varphi = 0$ sein. Daraus folgt: Befinden sich zwei konzentrische projektivische Strahlenbüschel in Involution, so fallen die nicht entsprechenden Schenkel der entsprechenden rechten Winkel zusammen.

39. Die Verbindungslinien des Punktes mit zwei gegenüberliegenden Ecken mögen einander zugeordnet sein. Man hat demnach drei Strahlenpaare:

$$\begin{cases} \xi y - \eta x = 0, \\ (5\xi - 8)y - (5\eta - 3)x + 8\eta - 3\xi = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3\xi - 2)y - 3(\eta - 2)x + 2(\eta - 3\xi) = 0, \\ (\xi - 1)y + \eta x + \eta = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\xi - 2)y - \eta x + 2\eta = 0, \\ (2\xi + 1)y - (2\eta + 3)x + 3\xi - \eta = 0. \end{cases}$$

Betrachtet man die beiden ersten Strahlen als Fundamentalstrahlen, so sind die Parameter der vier übrigen:

$$k_1 = \frac{7(2\eta + 3\xi - 6)}{2(\eta - 3\xi)}, \quad k_2 = \frac{3(\eta - \xi + 1)}{\eta},$$

$$k_3 = \frac{6 - 2\eta - 3\xi}{2\eta}, \qquad k_4 = \frac{21(\xi - \eta - 1)}{\eta - 3\xi}.$$

Da nun $k_1 k_2 - k_3 k_4 = 0$ ist, so ist das Büschel ein involutorisches. (Vergl. Heft I, Aufg. u. Aufl. 267.)

40. Es läßt sich in ähnlicher Weise, wie in der vorhergehenden Lösung zeigen, daß das Büschel ein involutorisches ist.

41. Sind $L_1 + fL_2 = 0$, $L_1 + kL_2 = 0$ die Gleichungen der beiden Büschel, $af + bk = 0$ die Parametergleichung, so erhält man durch Elimination von f und k die Gleichung des Erzeugnisses

$$L_1(bL_2 + aL'_2) = 0.$$

Dasselbe besteht demnach aus zwei Geraden, nämlich aus der Geraden, mit welcher zwei entsprechende Strahlen zusammenfallen, und der perspektivischen Achse.

42. Da in diesem Falle $L_2 = L'_2 \pm C$, ferner $a = -b$ ist, so erhält man

$$L_1 C = 0,$$

d. h. die perspektivische Achse fällt mit der unendlich fernen Geraden zusammen.

43. Die Gleichung des Erzeugnisses ist

$$L_1 L'_1 - aL_1 L'_2 - bL'_1 L_2 + cL_2 L'_2 = 0.$$

Da diese in Bezug auf x und y vom zweiten Grade ist, so liegen die Schnittpunkte entsprechender Strahlen auf einem Kegelschnitte.

44. Die in der vorigen Lösung gefundene Gleichung wird zu einer identischen, wenn man $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ und wenn man $L'_1 = 0$, $L'_2 = 0$ setzt. Die Mittelpunkte der beiden Büschel liegen demnach auf dem Kegelschnitte. Die beiden Strahlen aber, welche der Verbindungslinie der Mittelpunkte entsprechen, berühren den Kegelschnitt in diesen Mittelpunkten.

45. Der Kegelschnitt kann in diesem Falle nur einen unendlich fernen Punkt besitzen; er ist demnach eine Parabel.

Sind die Gleichungen der Büschel

$$L_1 x + M_1 y + N_1 + f(L_2 x + M_2 y + N_2) = 0,$$
$$L'_1 x + M'_1 y + N'_1 + k(L'_2 x + M'_2 y + N'_2) = 0$$

und die Parametergleichung

$$af + bk = 0,$$

so müssen die Konstanten dieser Gleichungen der Relation

$$a^2(L_1M'_2 - L'_2M_1)^2 + b^2(L'_1M_2 - L_2M'_1)^2$$
$$+ 2ab(L_1M'_2 + L'_2M_1)(L'_1M_2 + L_2M'_1) - 4ab(L_1L'_2M'_1M_2 + L'_1L_2M_1M'_2) = 0$$

genügen.

46. Der Kegelschnitt hat zwei unendlich ferne Punkte, er muß demnach eine Hyperbel sein. Die Konstanten müssen in diesem Falle der Relation

$$a^2(L_1M'_2 - L'_2M_1)^2 + b^2(L'_1M_2 - L_2M'_1)^2 + 2ab(L_1M'_2 + L'_2M_1)(L'_1M_2 + L_2M'_1)$$
$$- 4ab(L_1L'_2M'_1M_2 + L'_1L_2M_1M'_2) > 0$$

genügen.

47. Der geometrische Ort kann keinen unendlich fernen Punkt besitzen, er ist also eine Ellipse. Es wird

$$a^2(L_1M'_2 - L'_2M_1)^2 + b^2(L'_1M_2 - L_2M'_1)^2 + 2ab(L_1M'_2 + L'_2M_1)(L'_1M_2 + L_2M'_1)$$
$$- 4ab(L_1L'_2M'_1M_2 + L'_1L_2M_1M'_2) < 0$$

sein.

48. $$a\begin{vmatrix} L_1 & M'_2 \\ M_1 & L'_2 \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} L'_1 & M_2 \\ M'_1 & L_2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$a\begin{vmatrix} L_1 & -M_1 \\ L'_2 & M'_2 \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} L_2 & -M_2 \\ L'_1 & M'_1 \end{vmatrix} = 0.$$

49. Sind P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 die fünf Punkte, so kann man zwei derselben, z. B. P_1 und P_2 als Mittelpunkte der erzeugenden Büschel ansehen. Verbindet man P_1 und P_2 mit jedem der übrigen Punkte, so erhält man von beiden Büscheln drei Paare entsprechender Strahlen. Durch diese sind (vergl. Aufl. 12) die beiden projektivischen Büschel selbst, also auch das Erzeugnis derselben bestimmt.

50. Man kann durch zwei Punkte Kegelschnitte legen, indem man um diese als Mittelpunkte projektivische Strahlenbüschel konstruiert. Die Parameter beider Büschel müssen in diesem Falle im allgemeinen durch eine Relation von der Form

$$fk + af + bk + c = 0$$

miteinander verknüpft sein. Jeder der Größen a, b, c können aber unendlich viele Werte beigelegt werden. Demnach werden sich durch zwei Punkte dreifach unendlich viele Kegelschnitte legen

lassen. Man ersieht sofort, daß sonach durch drei Punkte zweifach unendlich viele, durch vier Punkte einfach unendlich viele Kegelschnitte gelegt werden können.

51. Es seien a, b, c die Strahlen des ersten Büschels mit dem Mittelpunkte O, a_1, b_1, c_1 die entsprechenden Strahlen des zweiten mit dem Mittelpunkte O_1, ferner A der Schnittpunkt von a und a_1, B der Schnittpunkt von b und b_1, C der Schnittpunkt von c und c_1. Soll zu dem Strahle d des ersten Büschels der entsprechende des zweiten gesucht werden, so verlängert man BC bis zum Durchschnitt mit d in Q, a bis zum Durchschnitt mit c_1 in R und QR bis zum Durchschnitt mit AB in S, dann wird die Verbindungslinie von O_1 und S der Strahl sein, welcher d entspricht. (Vergl. den Satz des Pascal.)

52. Sind
$$L'_1 + kL'_2 = 0, \quad L''_1 + hL''_2 = 0$$
die Gleichungen der beiden ersten Strahlenbüschel,
$$L_1 + fL_2 = 0$$
die Gleichung des dritten und
$$af + bk = 0, \quad \alpha f + \beta h = 0$$
die Parametergleichungen, so ist die Gleichung des Erzeugnisses
$$\alpha b L'_1 L''_2 - \beta a L''_1 L'_2 = 0;$$
dasselbe ist also ebenfalls ein Kegelschnitt.

53. 1. Man erhält
$$x^2 + 6xy - y^2 - 3x - y = 0.$$
Der geometrische Ort des Schnittpunktes entsprechender Strahlen ist demnach eine Hyperbel.

2. Die Gleichung ist
$$22x^2 + 22y^2 - 85x - 58y + 13 = 0.$$
Das Erzeugnis der projektivischen Strahlenbüschel ist demnach ein Kreis.

3. Das Erzeugnis ist eine Parabel, welche der Gleichung
$$2704x^2 - 4264xy + 1681y^2 - 1094x + 739y - 152 = 0$$
entspricht.

4. Die Schnittpunkte entsprechender Strahlen liegen in diesem Falle auf einer Ellipse, deren Gleichung
$$13x^2 + 42xy + 34y^2 - 5x - 10y - 12 = 0$$
ist.

54. Sind

$$y - 1 - f(x - 1) = 0, \quad y - 5 - k(x - 4) = 0$$

die Gleichungen der beiden projektivischen Strahlenbüschel, so müssen die Parameter f und k der Relation

$$2kf - 5f + k = 0$$

genügen. Man erhält durch Elimination von f und k die Gleichung des Erzeugnisses

$$2y^2 - 4xy + 7y - 5 = 0.$$

Die Schnittpunkte entsprechender Strahlen liegen demnach auf einer Hyperbel. Daraus folgt: Gleitet die Grundlinie eines Dreiecks auf einer Geraden fort, während sich die beiden andern Seiten um zwei feste Punkte drehen, so beschreibt die der Grundlinie gegenüberliegende Spitze eine Hyperbel.

55. Die Gleichungen der beiden projektivischen Strahlenbüschel lassen sich auf die Form

$$x - 1 + f(y - 2) = 0, \quad x - 4 + k(y - 3) = 0$$

bringen, und zwar müssen die Parameter der Relation

$$f - 4k + 1 = 0$$

genügen. Man erhält durch Elimination von f und k die Gleichung

$$3xy + y^2 - 5x - 20y + 35 = 0.$$

Das Erzeugnis der Büschel ist sonach eine Hyperbel.

56. Die Seiten a und b sind entsprechende Strahlen zweier projektivischen Büschel, deren Gleichungen

$$y - fx = 0, \quad y - k(x - c) = 0$$

sind. Nach der Aufgabe ist $f = \operatorname{tg} \beta$, $k = - \operatorname{tg} \alpha$.

Das Erzeugnis entspricht den Gleichungen

$$y = 0, \quad y^2 + 2cx - c^2 = 0.$$

Es besteht demnach aus der X-Achse und einer Parabel.

57. Zur Bestimmung der Lösung lassen sich zwei projektivische Strahlenbüschel

$$y - fx = 0, \quad y - k(x - c) = 0$$

verwerten, deren Parameter für $\beta > \alpha$ der Gleichung

$$fk \operatorname{tg} \delta + f + k - \operatorname{tg} \delta = 0,$$

für $\alpha > \beta$ der Gleichung

$$kf \operatorname{tg} \delta - k - f - \operatorname{tg} \delta = 0$$

genügen müssen. Man erhält sonach zwei geometrische Örter, deren Gleichungen sind:

$$x^2 \operatorname{tg}\delta - 2yx - y^2 \operatorname{tg}\delta - xc \operatorname{tg}\delta + yc = 0,$$
$$x^2 \operatorname{tg}\delta + 2yx - y^2 \operatorname{tg}\delta - xc \operatorname{tg}\delta - yc = 0.$$

Die Spitze des Dreiecks bewegt sich in jedem von beiden Fällen auf einer Hyperbel.

58. Mit Hilfe zweier projektivischen Büschel findet man die Gleichung des geometrischen Ortes

$$y^2 + qx(x - c) = 0.$$

Derselbe ist eine Ellipse.

59. Die Schnittpunkte entsprechender Strahlen liegen auf einer Ellipse, deren Gleichung

$$a^2 y^2 + q^2 x^2 = a^2 q^2$$

ist.

60. Die Strahlenbüschel, welche Q_1 und Q_2 zu Mittelpunkten haben, sind projektivisch und entsprechen den Gleichungen

$$y - f(x - 2) = 0, \quad y - k(x - 3) = 0;$$

während die Parameter derselben der Gleichung

$$399kf - 290f - 552k + 320 = 0$$

genügen müssen. Daraus findet man die Gleichung des geometrischen Ortes

$$320x^2 - 842xy + 399y^2 - 1600x + 1974y + 1920 = 0.$$

Der Punkt P beschreibt demnach eine Hyperbel.

61. Verbindet man die gegebenen Berührungspunkte und den Punkt (x_1, y_1) miteinander, so bilden diese Geraden mit den gegebenen Tangenten drei Strahlenpaare von zwei projektivischen Strahlenbüscheln, nämlich

$$\begin{cases} y = 0, \\ y + x - 5 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y + x - 5 = 0, \\ 2y - 3x = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y - 2x + 10 = 0, \\ 5y - x - 13 = 0. \end{cases}$$

Nach Auflösung 12 findet man leicht die Parametergleichung

$$13k + 9f = 0$$

und mit Hilfe dieser die Gleichung des Kegelschnittes

$$13x^2 - yx + 31y^2 - 130x - 130y + 325 = 0.$$

Derselbe ist eine Ellipse.

62. Drei Strahlenpaare der projektivischen Büschel, deren Mittelpunkte P_1 und P_4 sind, entsprechen den Gleichungen:

$$\begin{cases} y = 0, \\ y + 3x - 9 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y - x + 3 = 0, \\ 3y + x - 11 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x - 3 = 0, \\ y - 4x + 5 = 0. \end{cases}$$

Nach Bestimmung der Parametergleichung

$$7f - 13k = 0$$

gelangt man zu dem Resultate

$$39x^2 - 19xy + 8y^2 - 234x + y + 351 = 0.$$

Der Kegelschnitt ist eine Ellipse.

Projektivische Punktreihen in einer Ebene.

63. Die Gleichung der Punktreihe ist

$$A_1 + kA_2 = 0,$$

in der k eine Größe ist, welcher jeder beliebige reelle Wert erteilt werden kann.

64. An Stelle der Linienkoordinaten u, v sind lineare Formen derselben Koordinaten einzuführen. Die Form der Gleichung bleibt dabei ungeändert.

65. 1. $fk + af + bk + c = 0$; d. h. eine Gleichung, die sowohl in Bezug auf f als auf k vom ersten Grade ist.

2. $af + bk = 0$.

66. Mit Hilfe der Parametergleichung

$$fk + af + bk + c = 0$$

findet man leicht, daß

$$\frac{f_1 - f_3}{f_1 - f_4} : \frac{f_2 - f_3}{f_2 - f_4} = \frac{k_1 - k_3}{k_1 - k_4} : \frac{k_2 - k_3}{k_2 - k_4}$$

ist. (Vergl. Aufl. 10.)

67. Da $f = -\frac{8}{7}$, demnach $k = \frac{13}{22}$ ist, so ist die Gleichung des Punktes der zweiten Reihe

$$-2\tfrac{2}{5}u + 5\tfrac{8}{35}v + 1 = 0.$$

68. Wird der Schnittpunkt der Träger der ersten Punktreihe zugerechnet, so entspricht ihm der Punkt

$$7\tfrac{1}{8}u + 6\tfrac{1}{4}v + 1 = 0$$

der zweiten Punktreihe, wird er dagegen der zweiten Punktreihe zugerechnet, so entspricht ihm der Punkt

$$2\tfrac{13}{27}u + 3\tfrac{14}{27}v + 1 = 0$$

der ersten Punktreihe.

69. Dem unendlich fernen Punkte der ersten Punktreihe entspricht der Punkt

$$A'_1 + \frac{a - c}{b - 1} A'_2 = 0$$

der zweiten, ferner dem unendlich fernen Punkte der zweiten Punktreihe der Punkt

$$A_1 + \frac{b - c}{a - 1} A_2 = 0$$

der ersten Punktreihe. Diese beiden Punkte werden die den Punktreihen zugehörigen Gegenpunkte genannt.

Beispiel. Der Gegenpunkt in der ersten Punktreihe ist

$$8u - 43v + 1 = 0,$$

der in der zweiten

$$-19u - 9v + 1 = 0.$$

70. Der Gegenpunkt in der zweiten Punktreihe liegt in diesem Falle ebenfalls in der Unendlichkeit. Die beiden Punktreihen werden ähnliche genannt. Die Konstanten der Parametergleichung

$$fk + af + bk + c = 0$$

müssen in diesem Falle der Relation

$$a + b = c + 1$$

genügen.

71. Der Inhalt des Rechtecks ist

$$J = \frac{ab}{(a+b)^2} \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2} \sqrt{(a'_2 - a'_1)^2 + (b'_2 - b'_1)^2}.$$

Da der Ausdruck f und k nicht enthält, so folgt, daß der Inhalt des Rechtecks eine konstante Größe ist.

Nähert sich demnach ein Punkt der einen Reihe dem zugehörigen Gegenpunkte, so muß sich der entsprechende Punkt der andern Reihe von dem Gegenpunkte dieser letzteren entfernen.

72. Sind A_1, A_2 zwei Punkte der ersten Punktreihe, A'_1, A'_2 die entsprechenden der zweiten, so ist

$$A_1 A_2 = \frac{(f_1 - f_2)\sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}}{(1 + f_1)(1 + f_2)},$$

$$A'_1 A'_2 = \frac{(k_1 - k_2)\sqrt{(a'_2 - a'_1)^2 + (b'_2 - b'_1)^2}}{(1 + k_1)(1 + k_2)}.$$

Da nun die Parametergleichung $f - k = 0$ ist, so folgt

$$\frac{A_1 A_2}{A'_1 A'_2} = \frac{\sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}}{\sqrt{(a'_2 - a'_1)^2 + (b'_2 - b'_1)^2}}.$$

Das Verhältnis der Abschnitte zwischen entsprechenden Punkten der beiden Punktreihen hat demnach einen konstanten Wert.

73. Sind f_1 und f_2 die Parameter zweier Punkte der ersten Punktreihe, deren Abstand gleich dem zwischen den entsprechenden Punkten der zweiten Reihe ist, so müssen sie der Relation

$$a(a r_1 + b r_2) f_1 f_2 + ab(r_2 - r_1)(f_1 + f_2) + b(r_2 a + r_1 b) = 0,$$

in der

$$r_1 = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (b_2 - b_1)^2}, \quad r_2 = \sqrt{(a'_2 - a'_1)^2 + (b'_2 - b'_1)^2}$$

sind, genügen. Da die Gleichung bei einer Vertauschung von f_1 und f_2 unverändert bleibt, so wird sich zu jedem Punkte der ersten Reihe stets ein einziger Punkt derselben Reihe finden lassen, der der Anforderung entspricht.

74. Da $f_1 = 2$ ist, so wird $f_2 = -\frac{1}{2}$, $k_1 = 1$, $k_2 = -\frac{1}{4}$ sein. Die Gleichungen der gesuchten Punkte sind demnach:

$$(P_2)\ -1u - 2v + 1 = 0,$$

$$(Q_1)\ 5u + 5v + 1 = 0, \quad (Q_2)\ -\tfrac{5}{3}u + 1 = 0;$$

und es ist

$$P_1 P_2 = Q_1 Q_2 = 8\tfrac{1}{3}.$$

75. Betrachten wir

$$5u + 2v + 1 + f(7u + 6v + 1) = 0,$$
$$2u - 1v + 1 + k(4u - 3v + 1) = 0$$

als die Gleichungen der Punktreihen, so ist die Parametergleichung

$$5f - 3k = 0.$$

Dem Punkte P_1 entspricht der Punkt

$$3\tfrac{7}{13}u - 2\tfrac{7}{13}v + 1 = 0.$$

Der Gegenpunkt der ersten Punktreihe ist

der der zweiten

$$2u - 4v + 1 = 0,$$
$$7u - 6v + 1 = 0.$$

76. In dem Schnittpunkte, dessen Gleichung

$$2u + 3v + 1 = 0$$

ist, fallen zwei entsprechende Punkte zusammen.

77. $$A_1 + fA_2 = 0, \quad A_1 + kA'_2 = 0.$$

78. $$\frac{a}{b} = \frac{a_2 - a'_1}{a'_2 - a_1} = \frac{b_2 - b'_1}{b'_2 - b_1}.$$

79. Zur Bestimmung des Punktes, in welchem der Strahl den Träger der ersten Punktreihe schneiden muß, läßt sich die Gleichung

$$\begin{vmatrix} b_1 + fb_2 & b'_1 - \frac{a}{b} b'_2 f & b_3 \\ a_1 + fa_2 & a'_1 - \frac{a}{b} a'_2 f & a_3 \\ 1 + f & 1 - \frac{a}{b} f & 1 \end{vmatrix} = 0$$

benutzen. Da diese in Bezug auf f vom zweiten Grade ist, so werden sich im allgemeinen durch den gegebenen Punkt zwei Strahlen legen lassen, welche die Träger in entsprechenden Punkten schneiden.

Beispiel. Von dem gegebenen Punkte lassen sich die beiden Strahlen

$$3y - x - 10 = 0,$$
$$34y - 15x - 116 = 0$$

ziehen, welche die erste Punktreihe in den Punkten

$$4u + 4\tfrac{2}{3}v + 1 = 0, \quad 4\tfrac{4}{7}u + 5\tfrac{3}{7}v + 1 = 0,$$

die zweite in den Punkten

$$5u + 5v + 1 = 0, \quad 7u + 6\tfrac{1}{2}v + 1 = 0$$

schneiden.

80. Die Verbindungslinien bilden ein Büschel, welches der Gleichung

$$y - \frac{b'_2 a + b_2 b}{a + b} - M\left(x - \frac{a'_2 a + a_2 b}{a + b}\right) = 0$$

entspricht. Die beiden Punktreihen befinden sich in perspektivischer Lage. Das Büschel ist zu jeder der Punktreihen projektivisch.

81. Die Relation muß in Bezug auf jede der Größen f und k vom ersten Grade sein und demnach die Form

$$afk + bf + ck + d = 0$$

besitzen.

82. Liegt der Punkt, dessen Parameter k_1 ist, auf dem ihm entsprechenden Strahle, welcher durch den Parameter f_1 bestimmt ist, so muß die Gleichung

$$\frac{a_1 + k_1 a_2}{1 + k_1}(L_1 + f_1 L_2) + \frac{b_1 + k_1 b_2}{1 + k_1}(M_1 + f_1 M_2) + N_1 + f_1 N_2 = 0$$

eine identische sein. Diese Relation nimmt nach einer einfachen Umwandlung die Gestalt

$$(L_2 a_2 + M_2 b_2 + N_2) f_1 k_1 + (L_2 a_1 + M_2 b_1 + N_2) f_1 + (L_1 a_2 + M_1 b_2 + N_1) k_1$$
$$+ L_1 a_1 + M_1 b_1 + N_1 = 0$$

an. Setzt man an Stelle von k_1 den Ausdruck $-\frac{bf_1 + d}{af_1 + c}$, so wird diese Gleichung in Bezug auf f_1 vom zweiten Grade sein. Daraus folgt: Befinden sich ein Strahlenbüschel und eine ihm projektivische Punktreihe in schiefer Lage, so besitzt das Büschel zwei Strahlen, welche durch die ihnen entsprechenden Punkte gehen.

83. 1. Aus der vorhergehenden Lösung folgt, daß

$$\lambda a = L_2 a_2 + M_2 b_2 + N_2,\ \lambda b = L_2 a_1 + M_2 b_1 + N_2,$$
$$\lambda c = L_1 a_2 + M_1 b_2 + N_1,\ \lambda d = L_1 a_1 + M_1 b_1 + N_1$$

ist, wenn λ eine beliebige Konstante bedeutet.

2. Da in diesem Falle

$$L_2 a_2 + M_2 b_2 + N_2 = 0 \text{ und } L_1 a_1 + M_1 b_1 + N_1 = 0$$

ist, so lautet die Parametergleichung

$$bf + ck = 0.$$

84. Man zieht die Gerade $A_1 A_2$, nimmt auf derselben zwei Punkte P_1 und P_2 an und verbindet P_1 mit B_1 und C_1, dagegen P_2 mit B_2 und C_2. Auf diese Weise erhält man drei Strahlenpaare von projektivischen Strahlenbüscheln, die sich in perspektivischer Lage befinden, so daß die Schnittpunkte entsprechender Strahlen auf einer Geraden g liegen. Verbindet man den Schnittpunkt des Strahles $P_1 D_1$ und der Geraden g mit dem Punkte P_2, so wird diese Verbindungslinie den Träger der zweiten Punktreihe in dem gesuchten Punkte D_2 durchschneiden.

85. Es möge der Strahl a_1 von den Strahlen a_2, b_2, c_2 in den Punkten A_1, B_1, C_1, dagegen der Strahl a_2 von b_1, c_1 und d_1 in B_2, C_2 und D_2 geschnitten werden, dann sind A_1 und A_1, B_1 und B_2, C_1 und C_2 Punktpaare von projektivischen Punktreihen in perspektivischer Lage. Wir bezeichnen den Schnittpunkt von $B_1 B_2$ und $C_1 C_2$ mit P_3. Verbinden wir nun P_3 mit D_2, so schneidet diese Gerade den Strahl a_1 in einem Punkte D_1, welcher auf dem gesuchten Strahle d_2 liegen muß und demnach mit P_2 die Richtung desselben bestimmt.

86. Man zieht zunächst die Gerade $F_1 A_2$ und durch B_2 eine Parallele zu g_1, welche $F_1 A_2$ in L schneidet, dann trifft $B_1 L$ den Träger g_2 in dem Gegenpunkte der Punktreihe auf dieser Geraden. Zieht man dagegen durch B_1 eine Parallele zu g_2, welche $F_1 A_2$ in M schneidet, und verbindet B_2 mit M, so schneidet die Verlängerung dieser Geraden g_1 in dem andern Gegenpunkte.

87. Setzt man

$$A'_1 = s(A_1 + rA_2), \quad A'_2 = q(A_1 + pA_2),$$

so erhält man als Gleichung der zweiten Punktreihe

$$A_1 + \frac{rs + pqk}{s + qk} A_2 = 0.$$

Beispiel. Die Gleichung der zweiten Punktreihe ist

$$5u + 3v + 1 + \frac{1 - 8k}{3(1 + 4k)} (9u + 2v + 1) = 0.$$

88. Gehört der gegebene Punkt der ersten Punktreihe an, so entspricht ihm in der zweiten der Punkt

$$6\tfrac{5}{11} u + 4\tfrac{2}{55} v + 1 = 0;$$

wird er dagegen der zweiten Punktreihe zugerechnet, so entspricht ihm in der ersten der Punkt

$$-5\tfrac{7}{16} u + \tfrac{15}{32} v + 1 = 0.$$

89. Der ersten Punktreihe gehört der Gegenpunkt

$$11u + 6v + 1 = 0,$$

der zweiten dagegen der Gegenpunkt

$$14u + 9v + 1 = 0$$

an.

90. 1. Man verbindet einen beliebigen Punkt P, welcher außerhalb des Trägers liegt, mit den Punkten der ersten Reihe $A, B, C, D \ldots$ und legt durch das so erhaltene Büschel eine Gerade g, welche der Strahl PA in A_2, PB in B_2, PC in C_2, PD in $D_2 \ldots$ schneidet. Zieht man nun von A_1 aus die Strahlen $A_1 A_2$, $A_1 B_2$, $A_1 C_2$, $A_1 D_2$, ferner von A_2 aus die Strahlen $A_2 B_1$, $A_2 C_1$, so muß die Gerade g_1, welche den Schnittpunkt von $A_1 B_2$ und $A_2 B_1$ und den von $A_1 C_2$ und $A_2 C_1$ verbindet, den Strahl $A_1 D_2$ in einem Punkte Q schneiden, welcher mit A_2 und dem gesuchten Punkte D_1 in einer geraden Linie liegt.

2. Zieht man durch A_2 eine Parallele zu dem Träger der konjektivischen Punktreihen, so schneidet diese die Gerade g_1 in einem Punkte R, so daß $A_2 R$ den Träger in dem Gegenpunkte trifft, welcher der zweiten Punktreihe angehört. Den Gegenpunkt, welcher ein Glied der ersten Punktreihe ist, kann man durch eine entsprechende Konstruktion ermitteln.

91. Die Gleichung der zweiten Punktreihe läßt sich nach Aufl. 87 in die Form

$$A_1 + \frac{rs + pqk}{s + qk} A_2 = 0$$

bringen.

Sollen nun beide Punktreihen in demselben Sinne verlaufen, so müssen die beiden Produkte

$$(f_1 - f_2)(f_2 - f_3)(f_3 - f_1)$$

und

$$\left(\frac{rs+pqk_1}{s+qk_1} - \frac{rs+pqk_2}{s+qk_2}\right)\left(\frac{rs+pqk_2}{s+qk_2} - \frac{rs+pqk_3}{s+qk_3}\right)\left(\frac{rs+pqk_3}{s+qk_3} - \frac{rs+pqk_1}{s+qk_1}\right)$$

gleiche Vorzeichen besitzen. Mit Hilfe der Relation $af + bk = 0$ kann man dem zweiten Produkte die Gestalt

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^3 [qs(r-p)]^3 (f_1 - f_2)(f_2 - f_3)(f_3 - f_1)}{\left(s - \frac{a}{b} qf_1\right)^2 \left(s - \frac{a}{b} qf_2\right)^2 \left(s - \frac{a}{b} qf_3\right)^2}$$

erteilen. Durch Vergleichung der beiden Ausdrücke gelangt man demnach zu folgendem Resultate: Besitzt der Ausdruck $\frac{a}{b} qs(r-p)$ einen positiven Wert, so haben die beiden Punktreihen einen gleichstimmigen Verlauf, besitzt dagegen der Ausdruck einen negativen Wert, so sind die Punktreihen entgegengesetzt verlaufend.

92. 1. Es ist $\frac{a}{b} qs(r-p) = \frac{3}{2}$, die beiden Punktreihen verlaufen also gleichstimmig.

2. Da $\frac{a}{b} qs(r-p) = -2$ ist, so sind die beiden Punktreihen entgegengesetzt verlaufend.

93. Bringt man die Gleichung der zweiten Punktreihe auf die Form

$$A_1 + \frac{rs + pqk}{s + qk} A_2 = 0,$$

so ersieht man, daß zwei entsprechende Punkte zusammenfallen, wenn

$$f = \frac{brs - apqf}{bs - aqf}$$

ist. Entwickelt man diese Gleichung nach f, so ergiebt sich:

$$f = \frac{apq + bs \pm \sqrt{(apq - bs)^2 - 4abqs(r-p)}}{2aq}.$$

Unter Berücksichtigung der Aufl. 91 gelangt man demnach zu folgendem Resultate:

Zwei konjektivische entgegengesetzt verlaufende Punktreihen besitzen stets zwei reelle getrennt liegende Doppelpunkte. Zwei konjektivische gleichstimmig verlaufende Punktreihen haben ebenfalls zwei Doppelpunkte, doch sind dieselben reell und liegen getrennt oder fallen zusammen, wenn

$$(apq - bs)^2 \geqq 4abqs(r-p)$$

ist; sie sind dagegen imaginär, wenn

$$(apq - bs)^2 < 4abqs(r-p)$$

ist.

94. 1. Die beiden Punktreihen sind entgegengesetzt verlaufend und besitzen die beiden reellen Doppelpunkte

$$1u - 4v + 1 + \frac{11 \pm \sqrt{1801}}{40} (6u + 1v + 1) = 0.$$

2. Die beiden Punktreihen sind gleichstimmig verlaufend und besitzen zwei imaginäre Doppelpunkte, nämlich:

$$1u + 3v + 1 + \left(\frac{13 \pm i\sqrt{71}}{6}\right)(5u - 2v + 1) = 0.$$

95. Sind $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ die Gleichungen der Doppelpunkte, so sind die Gleichungen der konjektivischen Punktreihen

$$A_1 + fA_2 = 0, \quad A_1 + afA_2 = 0.$$

96. 1. Zu der ersten Punktreihe gehört der Gegenpunkt

$$aA_1 - A_2 = 0,$$

zu der zweiten dagegen der Gegenpunkt

$$A_1 - aA_2 = 0. \quad \text{(Vergl. Aufl. 95.)}$$

2. Der Halbierungspunkt der Strecke zwischen den Gegenpunkten halbiert auch den Abstand zwischen den Doppelpunkten. Das Resultat läßt sich leicht mit Hilfe der vorher entwickelten Gleichungen ableiten.

97. Man bestimmt zunächst nach Aufl. 90 die Gegenpunkte J_1 und J_2 der beiden konjektivischen Punktreihen und durch eine bekannte Konstruktion die mittlere geometrische Proportionale q zwischen den Strecken J_1A_1 und J_2A_2. Sodann beschreibt man über der Strecke J_1J_2 als Durchmesser einen Halbkreis und zieht zu dem Träger in der Entfernung q eine Parallele, welche den Halbkreis in L_1 und L_2 schneiden möge. Fällt man von L_1 und L_2 Lote auf den Träger der beiden Punktreihen, so sind die Fußpunkte die gesuchten Doppelpunkte.

98. Da die Gleichungen der beiden Punktreihen sich stets auf die Form

$$A_1 + fA_2 = 0, \quad A_1 + afA_2 = 0$$

bringen lassen, wenn $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ die Gleichungen der Doppelpunkte sind, so ist das Doppelverhältnis gleich $\frac{1}{a}$. Dasselbe hat demnach einen konstanten Wert.

99. $$A_1 + fA_2 = 0, \quad A_1 - fA_2 = 0.$$

Die beiden Punktreihen befinden sich in Involution.

100. Die Gegenpunkte der beiden Punktreihen fallen zusammen, die Punktreihen selbst befinden sich also in Involution.

101. Man erhält die Gleichungen der beiden gesuchten Punkte, wenn man in

$$a_1u + b_1v + 1 + f(a_2u + b_2v + 1) = 0$$

für f die Werte

$$\pm \sqrt{\frac{(a_3 - a_1)(a_2 - a_1) + (b_3 - b_1)(b_2 - b_1)}{(a_3 - a_2)(a_2 - a_1) + (b_3 - b_2)(b_2 - b_1)}}$$

einsetzt.

Beispiel. $\quad -2u + 3v + 1 \pm 2\sqrt{\tfrac{2}{3}}(3u + 8v + 1) = 0.$

102. Die Gleichung des Erzeugnisses ist

$$A_1 \,.\, A'_1 - a \,.\, A_1 \,.\, A'_2 - b \,.\, A'_1 \,.\, A_2 + c \,.\, A_2 \,.\, A'_2 = 0.$$

Da dieselbe in Bezug auf die Linienkoordinaten u, v vom zweiten Grade ist, so entspricht ihr im allgemeinen ein Kegelschnitt. (Vergl. Heft II, Aufg. und Aufl. 584.)

103. Die beiden Träger der Punktreihen sind selbst Tangenten des Erzeugnisses, und zwar sind diejenigen Punkte, welche dem Schnittpunkte der Träger entsprechen, die Berührungspunkte.

104. Ein Kegelschnitt ist durch fünf seiner Tangenten vollständig bestimmt. Denn je zwei der Tangenten werden von den drei übrigen in drei Punktpaaren geschnitten, durch welche sich zwei projektivische Punktreihen, deren Erzeugnis der Kegelschnitt ist, leicht finden lassen. (Vergl. Aufg. und Aufl. 75.)

105. Die Gleichungen der Punktreihen lassen sich in diesem Falle in die Form

$$A_1 + fA_2 = 0, \quad A_1 + kA'_2 = 0$$

bringen, während die Parametergleichung übergeht in $af + bk = 0$. Durch Elimination von f und k erhält man demnach

$$A_1 = 0, \quad aA'_2 + bA_2 = 0.$$

Daraus folgt: Das Erzeugnis der beiden Punktreihen besteht aus zwei Punkten, von denen der erste der Schnittpunkt der beiden Träger ist.

106. Es handelt sich hier nur um die Bestimmung der Lage desjenigen Punktes, welcher nicht mit dem Schnittpunkte der Träger zusammenfällt. Zu diesem Zwecke sucht man zunächst die Gegenpunkte und zieht durch dieselben Parallelen zu den Trägern. Der Schnittpunkt der beiden Parallelen ist der gesuchte Punkt.

107. Der Punkt außerhalb der Träger beschreibt einen Kreis, dessen Mittelpunkt der Gegenpunkt ist, welcher auf dem ruhenden Träger liegt.

108. Sind die Gleichungen der Punktreihen:

$$a_1 u + b_1 v + 1 + f(a_2 u + b_2 v + 1) = 0,$$
$$a'_1 u + b'_1 v + 1 + k(a'_2 u + b'_2 v + 1) = 0,$$

in denen die Fundamentalpunkte sich paarweise entsprechen, so ist die Parametergleichung $f - k = 0$ und demnach die des Erzeugnisses:

$$(a_1 u + b_1 v + 1)(a'_2 u + b'_2 v + 1) - (a'_1 u + b'_1 v + 1)(a_2 u + b_2 v + 1) = 0$$

oder
$$A_1 u^2 + 2 B_1 uv + C_1 v^2 + 2 D_1 u + 2 E_1 v = 0,$$

wo
$$A_1 = a_1 a'_2 - a'_1 a_2, \quad 2 B_1 = a_1 b'_2 - a_2 b'_1 + a'_2 b_1 - a'_1 b_2,$$
$$C_1 = b_1 b'_2 - b'_1 b_2, \quad 2 D_1 = a_1 - a'_1 - (a_2 - a'_2), \quad 2 E_1 = b_1 - b'_1 - (b_2 - b'_2)$$

sind. Da die alleinstehende Konstante gleich Null ist, so ist das Erzeugnis eine Parabel, vorausgesetzt daß

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ B_1 & C_1 & E_1 \\ D_1 & E_1 & 0 \end{vmatrix} \gtrless 0$$

ist. (Vergl. Heft II, Aufl. 584.)

109. Sind

$$a_1 u + b_1 v + 1 + f(a_2 u + b_2 v + 1) = 0,$$
$$a'_1 u + b'_1 v + 1 + k(a'_2 u + b'_2 v + 1) = 0$$

die Gleichungen der Punktreihen, ist ferner

$$af + bk = 0$$

die Parametergleichung, so kann die in der Aufgabe angegebene Lage der Punkte nur dann stattfinden, wenn

$$F_1 \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ B_1 & C_1 & E_1 \\ D_1 & E_1 & F_1 \end{vmatrix} > 0$$

ist, vorausgesetzt daß

$$A_1 = a a_1 a'_2 + b a_2 a'_1, \quad 2 B_1 = a(a'_2 b_1 + a_1 b'_2) + b(a_2 b'_1 + a'_1 b_2),$$
$$C_1 = a b_1 b'_2 + b b_2 b'_1, \quad 2 D_1 = a(a'_2 + a_1) + b(a_2 + a'_1),$$
$$2 E_1 = a(b'_2 + b_1) + b(b_2 + b'_1), \quad F_1 = a + b.$$

Da sich nun bei Elimination von f und k aus den Gleichungen der Punktreihen und der Parametergleichung die Relation

$$A_1 u^2 + 2 B_1 uv + C_1 v^2 + 2 D_1 u + 2 E_1 v + F_1 = 0$$

ergiebt, so folgt, daß in diesem Falle das Erzeugnis der beiden Punktreihen eine Ellipse ist. (Vergl. Heft II, Aufg. und Aufl. 584.)

110. Haben die Gleichungen der Punktreihen und die Parametergleichung dieselbe Form wie in der Aufl. 109 und werden

dieselben Bezeichnungen zur Abkürzung benutzt, so wird die in der Aufgabe angegebene Lage der Punkte nur dann eintreten, wenn

$$F_1 \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ B_1 & C_1 & E_1 \\ D_1 & E_1 & F_1 \end{vmatrix} < 0$$

ist. Da die Gleichung des Erzeugnisses der Punktreihen, welche man durch Elimination der Parameter f und k gewinnt, die Form

$$A_1 u^2 + 2 B_1 u v + C_1 v^2 + 2 D_1 u + 2 E_1 v + F_1 = 0$$

besitzt, so folgt, daß die Enveloppe der Strahlen, von denen jeder zwei entsprechende Punkte der Reihen verbindet, eine Hyperbel ist. (Vergl. Heft II, Aufg. und Aufl. 584.)

111. Die Gleichungen der Punktreihen lassen sich in die Form

$$A_1 + f A_2 = 0, \quad A_1 + k A_2 = 0$$

bringen, wenn die Parameter f und k der Gleichung

$$a f + k + 1 = 0$$

genügen. Man erhält demnach als Gleichung des Erzeugnisses

$$a A_1 A'_2 + A_1 A_2 - A_2 A'_2 = 0.$$

Das Strahlensystem wird von einer Hyperbel eingehüllt, und zwar ist der Träger der Punktreihe, deren Gegenpunkt im Schnittpunkte liegt, eine Asymptote der Kurve.

112. Es ergiebt sich als Gleichung der Enveloppe

$$A_1 A'_2 + A_1 A_2 - A_2 A'_2 = 0;$$

dieselbe ist ebenfalls eine Hyperbel; die Träger der beiden Punktreihen sind Asymptoten derselben.

113. Die Bedingungsgleichungen sind:

$$\begin{vmatrix} B_1 & D_1 \\ E_1 & F_1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} D_1 + E_1 & F_1 \\ A_1 - C_1 & D_1 - E_1 \end{vmatrix} = 0,$$

wenn

$$A_1 = a a_1 a'_2 + b a_2 a'_1, \quad 2 B_1 = a(a'_2 b_1 + a_1 b'_2) + b(a_2 b'_1 + a'_1 b_2),$$
$$C_1 = a b_1 b'_2 + b b_2 b'_1, \quad 2 D_1 = a(a'_2 + a_1) + b(a_2 + a'_1),$$
$$2 E_1 = a(b'_2 + b_1) + b(b_2 + b'_1), \quad F_1 = a + b$$

ist. (Vergl. Heft I, Aufg. und Aufl. 384b.)

114. 1. $8u^2 + 2uv - 8v^2 - u - 6v - 1 = 0;$

das Erzeugnis ist eine Ellipse.

2. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte werden von der Parabel
$$9u^2 - 41uv - 22v^2 + u - 10v = 0$$
eingehüllt.

3. $$19u^2 - 3uv - 3v^2 + 6u - 4v + 1 = 0.$$
Das Erzeugnis ist eine Hyperbel; die Träger der Punktreihen sind die Asymptoten der Kurve.

4. Die Punktreihen befinden sich in perspektivischer Lage; das Erzeugnis derselben besteht aus den beiden Punkten
$$3u + 4v + 1 = 0, \quad -\tfrac{13}{2}u - 1v + 1 = 0.$$

115. Man findet leicht drei Paare entsprechender Punkte der projektivischen Punktreihen, welche auf den beiden gegebenen Geraden entstehen, nämlich:
$$\begin{cases} 10u + 5v + 1 = 0, \\ 3\tfrac{1}{3}u + 10v + 1 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 20u + 10v + 1 = 0, \\ 10u + 30v + 1 = 0; \end{cases}$$
$$\begin{cases} \dfrac{20(1 - \operatorname{tg}\varphi)}{1 - 2\operatorname{tg}\varphi}u + \dfrac{10(1 - \operatorname{tg}\varphi)}{1 - 2\operatorname{tg}\varphi}v + 1 = 0, \\[2ex] \dfrac{10(1 + \operatorname{tg}\varphi)}{1 + 3\operatorname{tg}\varphi}u + \dfrac{30(1 + \operatorname{tg}\varphi)}{1 + 3\operatorname{tg}\varphi}v + 1 = 0. \end{cases}$$
Sind demnach die Gleichungen der projektivischen Punktreihen:
$$10u + 5v + 1 + f(20u + 10v + 1) = 0,$$
$$3\tfrac{1}{3}u + 10v + 1 + k(10u + 30v + 1) = 0,$$
so ist die Parametergleichung $2f + 3k = 0$. Aus diesen Relationen ergiebt sich als Gleichung der Enveloppe
$$80u^2 + 280uv + 120v^2 + 22u + 26v + 1 = 0.$$
Dieselbe ist eine Ellipse.

116. Die Enveloppe ist eine Parabel, welche der Gleichung
$$3u^2 - 3uv - 3v^2 - 2u + v = 0$$
entspricht.

117. Die zu den Strahlen des Büschels gezogenen Parallelen werden von der Parabel
$$27u^2 + 32uv + 6v^2 + 5u = 0$$
eingehüllt.

118. Die auf die Strahlen des Büschels gefällten Lote werden von der Parabel

$$4u^2 - 21uv - 28v^2 - 5v = 0$$

eingehüllt. In welcher Beziehung steht der Träger der Punktreihe zu der Parabel?

119. Die Enveloppe ist eine Parabel, welche der Gleichung

$$u^2 ab \operatorname{tg}\varphi + v^2 ab \operatorname{tg}\varphi + u(a + b \operatorname{tg}\varphi) - v(b - a \operatorname{tg}\varphi) = 0$$

entspricht.

120. Betrachten wir g_1 und g_2 als Koordinatenachsen, so sind die Gleichungen der Punktreihen auf denselben

$$(f + a)u + 1 = 0, \quad (k + b)v + 1 = 0,$$

während die Parameter f und k der Relation

$$\begin{vmatrix} p & q & 1 \\ f & 0 & 1 \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix} = 0$$

genügen müssen, vorausgesetzt daß p, q die Koordinaten des festen Punktes P sind. Durch Elimination von f und k gelangt man zu der Gleichung der Enveloppe

$$(ab + aq + bp)uv + (a + p)u + (b + q)v + 1 = 0.$$

Dieselbe ist eine $\left\{\begin{array}{l}\text{Ellipse}\\\text{Hyperbel}\end{array}\right.$, wenn

$$pq(ab + aq + bp) \gtrless 0$$

ist.

121. Betrachten wir die beiden ersten Geraden

$$y + x - 6 = 0, \quad y - 2x + 8 = 0$$

als Träger projektivischer Punktreihen, so sind die Punkte, in denen diese von den drei übrigen Geraden geschnitten werden, drei Punktpaare der Reihen, nämlich:

$$\left\{\begin{array}{l} 1u + 5v + 1 = 0, \\ 3u - 2v + 1 = 0, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} 5u + 1v + 1 = 0, \\ 6u + 4v + 1 = 0, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} 4u + 2v + 1 = 0, \\ 5u + 2v + 1 = 0. \end{array}\right.$$

Mit Hilfe derselben erhält man leicht die Gleichung

$$33u^2 - 89uv - 46v^2 + 10u - 21v + 1 = 0.$$

Der gesuchte Kegelschnitt ist demnach eine Hyperbel.

122. Nehmen wir an, daß die Geraden

$$y - 2x + 8 = 0, \quad y + x - 1 = 0$$

die Träger zweier projektivischen Punktreihen seien, so finden wir leicht als Gleichungen der Reihen

$$5u + 2v + 1 + f(7u + 6v + 1) = 0,$$
$$2u - 1v + 1 + k(4u - 3v + 1) = 0,$$

und als Parametergleichung

$$5f - 3k = 0.$$

Demnach ergiebt sich als Gleichung des Kegelschnittes

$$58u^2 - 50uv - 12v^2 + 18u - 20v + 2 = 0;$$

derselbe ist eine Hyperbel.

Gebilde zweiter Ordnung.

123. Die Gleichung eines beliebigen Punktes des Erzeugnisses ist:

$$\begin{vmatrix} N_1 + fN_2 & M_1 + fM_2 \\ N'_1 + fN'_2 & M'_1 + fM'_2 \end{vmatrix} u + \begin{vmatrix} L_1 + fL_2 & N_1 + fN_2 \\ L'_1 + fL'_2 & N'_1 + fN'_2 \end{vmatrix} v$$
$$= \begin{vmatrix} L_1 + fL_2 & M_1 + fM_2 \\ L'_1 + fL'_2 & M'_1 + fM'_2 \end{vmatrix},$$

oder nach Potenzen von f entwickelt:

$$\{ (M'_2N_2 - M_2N'_2)u + (L_2N'_2 - L'_2N_2)v - (L_2M'_2 - L'_2M_2) \} f^2$$
$$+ \{ [(M'_2N_1 - M_2N'_1) + (M'_1N_2 - M_1N'_2)]u + [(L_2N'_1 - L'_2N_1) + (L_1N'_2 - L'_1N_2)]v$$
$$- [(L_1M'_2 - L'_1M_2) + (L_2M'_1 - L'_2M_1)] \} f$$
$$+ (M'_1N_1 - M_1N'_1)u + (L_1N'_1 - L'_1N_1)v - (L_1M'_1 - L'_1M_1) = 0.$$

Erteilt man dem Parameter f alle möglichen reellen Werte, so erhält man die Gleichungen aller Punkte des Kegelschnittes. Der gefundenen Gleichung entspricht demnach eine Punktreihe zweiter Ordnung.

Beispiel. $$\frac{5 - 10f - f^2}{7 + f + f^2}u + \frac{-2 + 18f - f^2}{7 + f + f^2}v + 1 = 0,$$

oder

$$(1u + 1v - 1)f^2 + (10u - 18v - 1)f - (5u - 2v + 7) = 0.$$

124. Aus der vorhergehenden Lösung folgt, daß eine Punktreihe zweiter Ordnung einer Gleichung von der Form

$$A_0 + A_1 f + A_2 f^2 = 0$$

entspricht, wenn

$$A_0 \equiv a_0u + b_0v + c_0,\ A_1 \equiv a_1u + b_1v + c_1,\ A_2 \equiv a_2u + b_2v + c_2.$$

Die Punktreihe zweiter Ordnung ist demnach durch drei Punkte bestimmt, von denen zwei, in diesem Falle $A_0 = 0$, $A_2 = 0$, zu

der Reihe gehören; denn die vorstehende Gleichung geht für $f = 0$ in $A_0 = 0$, für $f = \infty$ in $A_2 = 0$ über. Die Verbindungslinie der beiden Punkte $A_0 = 0$, $A_2 = 0$ ist die Polare des Punktes $A_1 = 0$ bezüglich des Trägers der Punktreihe. Die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Reihe sind:

$$x = \frac{a_0 + a_1 f + a_2 f^2}{c_0 + c_1 f + c_2 f^2}, \quad y = \frac{b_0 + b_1 f + b_2 f^2}{c_0 + c_1 f + c_2 f^2}.$$

125. Die Gleichung der Punktreihe ist

$$3u + 5v + 1 + (1u + 1v + 1)f + (2u - 1v + 1)f^2 = 0;$$

für $f = 2$ geht dieselbe über in

$$1\tfrac{6}{7}u + \tfrac{3}{7}v + 1 = 0.$$

126. Die Punkte der Reihe zweiter Ordnung liegen auf einer Ellipse, deren Gleichung ist

$$9x^2 + 15xy + 7y^2 - 69x - 56y + 130 = 0.$$

127. Die Gleichung des Trägers ist

$$7x^2 - 2xy + 4y^2 - 6x + 6y - 9 = 0.$$

Derselbe ist demnach eine Ellipse.

128. Der Träger fällt mit der unendlich fernen Geraden zusammen, wenn der Ausdruck

$$c_0 + c_1 f + c_2 f^2$$

für jeden Wert von f verschwindet.

129. Erteilen wir der gesuchten Relation die Form

$$a_1 u + b_1 v + 1 + (\alpha u + \beta v + \gamma)f + (a_2 u + b_2 v + 1)f^2 = 0,$$

so lassen sich folgende sechs Gleichungen aufstellen:

$$(a_1 - a_3) + f_1(\alpha - a_3\gamma) + f_1^2(a_2 - a_3) = 0, \quad (b_1 - b_3) + f_1(\beta - b_3\gamma) + f_1^2(b_2 - b_3) = 0,$$
$$(a_1 - a_4) + f_2(\alpha - a_4\gamma) + f_2^2(a_2 - a_4) = 0, \quad (b_1 - b_4) + f_2(\beta - b_4\gamma) + f_2^2(b_2 - b_4) = 0,$$
$$(a_1 - a_5) + f_3(\alpha - a_5\gamma) + f_3^2(a_2 - a_5) = 0, \quad (b_1 - b_5) + f_3(\beta - b_5\gamma) + f_3^2(b_2 - b_5) = 0.$$

Nach Elimination der Größen f_1, f_2, f_3 ergeben sich demnach drei Gleichungen, welche zur Bestimmung der Unbekannten α, β, γ ausreichen.

130. Auf Grund der vorhergehenden Lösung lassen sich die Gleichungen

$$(A'_1\alpha + B'_1\beta + C'_1\gamma)(A'_2\alpha + B'_2\beta + C'_2\gamma) = N_1^2,$$
$$(A''_1\alpha + B''_1\beta + C''_1\gamma)(A''_2\alpha + B''_2\beta + C''_2\gamma) = N_2^2,$$
$$(A'''_1\alpha + B'''_1\beta + C'''_1\gamma)(A'''_2\alpha + B'''_2\beta + C'''_2\gamma) = N_3^2,$$
$$(A^{IV}_1\alpha + B^{IV}_1\beta + C^{IV}_1\gamma)(A^{IV}_2\alpha + B^{IV}_2\beta + C^{IV}_2\gamma) = N_4^2$$

entwickeln, deren Resultante die gesuchte Bedingungsgleichung ist.

131. Bezeichnet man die den beiden Punkten entsprechenden Parameter mit f_1 und f_2, so erhält man:

$$u = \frac{b_1 - b_0 + (f_1 + f_2)(b_2 - b_0) + f_1 f_2 (b_2 - b_1)}{a_1 b_0 - a_0 b_1 + (f_1 + f_2)(a_2 b_0 - a_0 b_2) + f_1 f_2 (a_2 b_1 - a_1 b_2)},$$
$$v = \frac{a_0 - a_1 + (f_1 + f_2)(a_0 - a_2) + f_1 f_2 (a_1 - a_2)}{a_1 b_0 - a_0 b_1 + (f_1 + f_2)(a_2 b_0 - a_0 b_2) + f_1 f_2 (a_2 b_1 - a_1 b_2)}.$$

132. Ist f_1 der Parameter des Berührungspunktes, so ergiebt sich:

$$u = \frac{b_1 - b_0 + 2 f_1 (b_2 - b_0) + f_1^2 (b_2 - b_1)}{a_1 b_0 - a_0 b_1 + 2 f_1 (a_2 b_0 - a_0 b_2) + f_1^2 (a_2 b_1 - a_1 b_2)},$$
$$v = \frac{a_0 - a_1 + 2 f_1 (a_0 - a_2) + f_1^2 (a_1 - a_2)}{a_1 b_0 - a_0 b_1 + 2 f_1 (a_2 b_0 - a_0 b_2) + f_1^2 (a_2 b_1 - a_1 b_2)}.$$

133. Die Bedingungsgleichung ist

$$A'^2_1 - 4 A'_0 A'_2 = 0,$$

wenn A'_0, A'_1, A'_2 die Werte sind, welche die Koeffizienten bei Einsetzung der Koordinaten u', v' annehmen.

134. Man verbinde einen beliebigen Punkt F, welcher ebenfalls der Punktreihe zweiter Ordnung angehört, mit den Punkten A, B, C, D, so ist das Doppelverhältnis der vier Strahlen FA, FB, FC, FD gleich dem der vier gegebenen Punkte. Es sei die Gleichung der Punktreihe

$$a_1 u + b_1 v + 1 + (a_2 u + b_2 v + 1) f + (a_3 u + b_3 v + 1) f^2 = 0,$$

ferner f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 die Parameter der Punkte A, B, C, D, F, dann ist die Gleichung des Strahles FA

$$H_1(y - B_1) - D_1(x - A_1) + f_1 \{G_1(y - B_1) - C_1(x - A_1)\} = 0,$$

und zwar sind in derselben die Konstanten unabhängig von f_1. Stellt man in entsprechender Weise die Gleichungen der übrigen Strahlen auf, so findet man mit Leichtigkeit den Wert des Doppelverhältnisses. Derselbe ist nur abhängig von den Parametern f_1, f_2, f_3, f_4, der Punkt F kann daher in der Punktreihe eine beliebige Lage haben.

135. Man verbinde einen beliebigen Punkt F der Punktreihe mit den Punkten A, B, C und konstruiere den FB konjugierten harmonischen Strahl, so wird derselbe die Punktreihe in dem vierten harmonischen Punkte schneiden.

Ist

$$a_1 u + b_1 v + 1 + (a_2 u + b_2 v + 1) f + (a_3 u + b_3 v + 1) f^2 = 0$$

die Gleichung der Punktreihe, so findet man nach der vorhergehenden Lösung, wenn f_1, f_2, f_3 die Parameter der Punkte A, B, C sind, die Gleichung des vierten harmonischen Punktes

$$(a_1 u + b_1 v + 1) + (a_2 u + b_2 v + 1) \frac{2 f_1 f_3 - f_2 (f_1 + f_3)}{f_1 + f_3 - 2 f_2}$$

$$+ (a_3 u + b_3 v + 1) \left\{ \frac{2 f_1 f_3 - f_2 (f_1 + f_3)}{f_1 + f_3 - 2 f_2} \right\}^2 = 0.$$

136. Der gesuchte harmonische Strahl berührt den Träger der Punktreihe im Punkte A.

137. Die beiden Parameter f und k müssen einer Bedingungsgleichung von der Form $af + bk = 0$ genügen.

138. $3\frac{6}{7} u - \frac{5}{7} v + 1 = 0.$

139. Liegt ein Punkt der Reihe auf dem ihm entsprechenden Strahle, so muß die Gleichung des Strahles bei Einsetzung der Koordinaten des Punktes eine identische werden. Das Resultat der Substitution ist eine Gleichung, welche in Bezug auf f vom dritten Grade ist. Daraus folgt, daß im allgemeinen drei Strahlen des Büschels durch die ihnen entsprechenden Punkte der Reihe gehen werden. Verschwinden sämtliche Koeffizienten der kubischen Gleichung, so geht jeder Strahl des Büschels durch den ihm entsprechenden Punkt der Reihe; der Mittelpunkt des Büschels liegt in diesem Falle ebenfalls auf dem Träger der Punktreihe. Büschel und Punktreihe befinden sich in perspektivischer Lage.

140. Zur Bestimmung von f ergiebt sich die kubische Gleichung

$$18 f^3 + 18 f^2 + 7 f = 0,$$

deren Wurzeln

$$f_1 = 0, \; f_{\substack{2\\3}} = -\tfrac{1}{2} \pm \frac{i}{6} \sqrt{5}$$

sind. Von den gesuchten Strahlen ist demnach nur ein einziger reell; derselbe entspricht der Gleichung

$$y - 3x + 8 = 0$$

und geht durch den Punkt

$$3u + 1v + 1 = 0.$$

141. $af + bk = 0.$

142. Für $u_1 = 1$, $v_1 = 1$ erhält man aus der ersten Gleichung die beiden Wurzeln

$$f_1 = 3, \quad f_2 = 1.$$

Setzt man diese Werte für f in die Gleichung der Punktreihe erster Ordnung ein, so erhält man die beiden gesuchten Punkte

$$3\tfrac{1}{2}u - \tfrac{1}{4}v + 1 = 0, \quad 4u + \tfrac{1}{2}v + 1 = 0.$$

143. Eliminiert man f aus den gegebenen Gleichungen, so ergiebt sich

$$A_0 B_1^2 - A_1 B_0 B_1 + A_2 B_0^2 = 0.$$

Die Enveloppe der Strahlen ist demnach eine Kurve dritter Klasse. Wie gestaltet sich das Resultat, wenn ein Punkt der Reihe erster Ordnung mit dem entsprechenden der Reihe zweiter Ordnung zusammenfällt?

144. Die Gleichungen der konjektivischen Punktreihen sind:

$$\beta u + \zeta v + \delta + f(\alpha u + \varepsilon v + \gamma) = 0,$$
$$\beta' u + \zeta' v + \delta' + f(\alpha' u + \varepsilon' v + \gamma') = 0.$$

Die Konstanten in denselben lassen sich leicht mit Hilfe der gegebenen Gleichungen finden. Entwickelt man die Wurzeln der Gleichung

$$(\alpha\gamma' - \alpha'\gamma)f^2 + (\beta\gamma' - \beta'\gamma + \alpha\delta' - \alpha'\delta)f + \beta\delta' - \beta'\delta = 0$$

und setzt dieselben in eine der obigen Gleichungen ein, so erhält man die Gleichungen der Doppelpunkte.

Mit jedem Doppelpunkte fällt der entsprechende Punkt der Punktreihe zweiter Ordnung zusammen.

145. $5\tfrac{8}{13}u + 3\tfrac{10}{13}v + 1 = 0.$

146. Die Bedingungsgleichung lautet:

$$A_1^2 - 4A_0A_2 - k(A_1'^2 - 4A_0'A_2') = 0;$$

k ist eine beliebige Konstante.

147. Die beiden projektivischen Punktreihen sind durch drei gegebene Punktpaare bestimmt. In denselben werden zwei Doppelpunkte vorkommen, welche entweder reell oder imaginär sind. Im ersten Falle können dieselben getrennt liegen oder zusammenfallen.

148. Man verbindet A mit B_1 und C_1, ferner A_1 mit B, C und D. Zieht man sodann eine Gerade g durch den Schnittpunkt der Strahlen AB_1 und A_1B und den der Strahlen AC_1 und A_1C, welche den Strahl A_1D in U schneidet, so trifft AU den Kegelschnitt in dem gesuchten Punkte D_1. Die Gerade g schneidet den Kegelschnitt in den beiden Doppelpunkten.

149. Die beiden Punkte $A_0 = 0$ und $A_2 = 0$ sind die Doppelpunkte der beiden Punktreihen.

150. Die Gleichungen der beiden projektivischen Punktreihen sind:

$$3u + 5v + 1 + (1u + 1v + 1)f + (2u - 1v + 1)f^2 = 0,$$
$$3u + 5v + 1 + 2(1u + 1v + 1)f + 4(2u - 1v + 1)f^2 = 0;$$

die Gleichungen der Doppelpunkte:

$$3u + 5v + 1 = 0, \quad 2u - 1v + 1 = 0.$$

Die beiden Punktreihen liegen auf einer Ellipse, welche der Gleichung

$$28x^2 - 12xy + 3y^2 - 140x + 22y + 163 = 0$$

entspricht.

151. Die Gleichungen der beiden projektivischen Punktreihen sind:

$$3u + 1v + 1 + (5u - 1v + 1)f + (9u + 2v + 1)f^2 = 0,$$
$$3u + 1v + 1 + (5u - 1v + 1)k + (9u + 2v + 1)k^2 = 0;$$

die Parametergleichung ist:

$$3f - k = 0$$

und die Gleichung des Trägers:

$$x^2 - 2xy + 4y^2 - 8x - 6y + 23 = 0.$$

Die beiden Punktreihen befinden sich auf einer Ellipse.

152. Man verbindet P mit Q durch die Gerade g und zieht A_1B, welche g in L schneiden möge; dann trifft die Gerade AL den gegebenen Kegelschnitt in dem gesuchten Punkte B_1.

153. Die Verbindungslinie der Punkte P_1 und P_2 schneidet den Kegelschnitt in den beiden Doppelpunkten.

154. Durch Elimination des Parameters f erhält man

$$(1 + m)^2 A_0 A_2 - m A_1{}^2 = 0.$$

Die Enveloppe der Strahlen ist demnach ein Kegelschnitt, welcher den Träger der beiden Punktreihen in den Doppelpunkten berührt.

155. Die Gleichung einer Geraden, welche zwei entsprechende Punkte der Punktreihen verbindet, läßt sich auf die Form bringen:

$$y(a'_1 - a_1) - x(b'_1 - b_1) + a_1 b'_1 - a'_1 b_1$$
$$+ \{y[a'_1 + a'_2 - (a_1 + a_2)] - x[b'_1 + b'_2 - (b_1 + b_2)] + a_1 b'_2 - a'_2 b_1 + a_2 b'_1 - a'_1 b_2\} f$$
$$+ \{y(a'_2 - a_2) - x(b'_2 - b_2) + a_2 b'_2 - a'_2 b_2\} f^2 = 0.$$

Erteilt man f alle möglichen reellen Werte, so entsprechen dieser Relation alle Strahlen, welche entsprechende Punkte der beiden Punktreihen verbinden. Diese Strahlen bilden ein Büschel zweiter Ordnung.

Beispiel. $-y + 2 + (3y - 2x + 2)f + (4y - 2x - 14)f^2 = 0.$

156. Die Gleichung des Büschels läßt sich durch die Gleichungen von drei geraden Linien

$$L_0 = 0, \ L_1 = 0, \ L_2 = 0$$

bestimmen, indem man die erste mit der nullten, die zweite mit der ersten, die dritte mit der zweiten Potenz eines variabeln Parameters f multipliziert und die Summe dieser Produkte gleich Null setzt:

$$L_0 + L_1 f + L_2 f^2 = 0.$$

157. Die Schnittpunkte sind:

$$L_0 = 0, \ L_1 + L_2 f = 0;$$
$$L_1 = 0, \ L_0 + L_2 f^2 = 0;$$
$$L_2 = 0, \ L_0 + L_1 f = 0.$$

158. Die Strahlen des Büschels werden von einem Kegelschnitte eingehüllt, welcher der Gleichung

$$4 L_0 L_2 - L_1^2 = 0$$

entspricht.

Beispiel. $19x^2 - 126xy + 31y^2 + 166x + 90y - 349 = 0.$
Die Enveloppe des Büschels ist eine Hyperbel.

159. $L_0 = 0$, $L_2 = 0$ sind Tangenten der Enveloppe und demnach Glieder des Büschels, während $L_1 = 0$ die Polare des Schnittpunktes der Strahlen $L_0 = 0$, $L_2 = 0$ bezüglich des einhüllenden Kegelschnittes ist.

160. Man erhält:

$$u = \frac{L_0 + L_1 f + L_2 f^2}{N_0 + N_1 f + N_2 f^2}, \quad v = \frac{M_0 + M_1 f + M_2 f^2}{N_0 + N_1 f + N_2 f^2}.$$

161. Bezeichnet man die Werte, welche die Ausdrücke L_0, L_1, L_2 bei Einsetzung der Koordinaten x', y' annehmen, mit L'_0, L'_1, L'_2, so erhält man zur Bestimmung des Parameters f die Gleichung

$$L'_0 + L'_1 f + L'_2 f^2 = 0.$$

Bei Einsetzung der Wurzeln dieser Gleichung in die gegebene Relation ergeben sich die Gleichungen der gesuchten Strahlen. Im allgemeinen schneiden sich demnach in jedem Punkte der Ebene zwei Strahlen des Büschels; dieselben können reell sein und getrennt liegen oder zusammenfallen, oder sie können imaginär sein. Wo muß der Punkt P liegen, wenn die beiden Strahlen zusammenfallen sollen?

162. Der gesuchte Strahl entspricht der Gleichung

$$x - y + 1 = 0.$$

163. Ist $L_0x+M_0y+N_0+(L_1x+M_1y+N_1)f_1+(L_2x+M_2y+N_2)f_1^2=0$ die Gleichung einer Tangente, so ist die der unendlich nahe liegenden

$$L_0x + M_0y + N_0 + (L_1x + M_1y + N_1)f_1 + (L_2x + M_2y + N_2)f_1^2$$
$$+ \{(L_1x + M_1y + N_1) + 2f_1(L_2x + M_2y + N_2)\}\delta = 0,$$

wo δ eine unendlich kleine Größe ist. Zur Bestimmung der Koordinaten des Berührungspunktes ergeben sich demnach die Gleichungen

$$L_1x + M_1y + N_1 + 2f_1(L_2x + M_2y + N_2) = 0,$$
$$2(L_0x + M_0y + N_0) + f_1(L_1x + M_1y + N_1) = 0.$$

Mit Hilfe derselben erhält man die Gleichung des Berührungspunktes

$$\begin{vmatrix} -(N_1 + 2f_1N_2) & M_1 + 2f_1M_2 \\ (2N_0 + f_1N_1) & 2M_0 + f_1M_1 \end{vmatrix} u + \begin{vmatrix} L_1 + 2f_1L_2 & -(N_1 + 2f_1N_2) \\ 2L_0 + f_1L_1 & -(2N_0 + f_1N_1) \end{vmatrix} v$$
$$+ \begin{vmatrix} L_1 + 2f_1L_2 & M_1 + 2f_1M_2 \\ 2L_0 + f_1L_1 & 2M_0 + f_1M_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Beispiel. $-1\frac{42}{83}u + \frac{2}{83}v + 1 = 0.$

164. Der Wert des Doppelverhältnisses ist gleich dem der vier Punkte, in denen die Strahlen einen beliebigen fünften Strahl des Büschels, z. B. $L_0 + L_1f_5 + L_2f_5^2 = 0$ schneiden. Es läßt sich leicht zeigen, daß diese Punkte dieselben sind, in welchen diese fünfte Tangente von den Strahlen

$$(L_1 + f_5 L_2) + f_1 L_2 = 0, \quad (L_1 + f_5 L_2) + f_3 L_2 = 0,$$
$$(L_1 + f_5 L_2) + f_2 L_2 = 0, \quad (L_1 + f_5 L_2) + f_4 L_2 = 0$$

geschnitten wird, die zu einem Büschel erster Ordnung gehören. Der Wert des Doppelverhältnisses der vier Strahlen ist demnach gleich

$$\frac{f_1 - f_3}{f_1 - f_4} : \frac{f_2 - f_3}{f_2 - f_4}.$$

165. Die Parameter der gegebenen Strahlen sind:

$$f_1 = 1, \; f_2 = 3, \; f_3 = -1.$$

Mit Hilfe derselben findet man: $f_4 = \frac{5}{4}$.

Die Gleichung des vierten harmonischen Strahles ist demnach

$$118x + 59y + 13 = 0.$$

166. Es seien t_1, t_2, t_3 die drei bestimmten Strahlen. Dieselben werden zwei beliebige Strahlen t_α und t_β schneiden, so daß auf jedem derselben drei Punkte bekannt sind. Bestimmt man zu den drei Punkten auf jeder der Geraden den vierten harmonischen Punkt und verbindet diese beiden Punkte durch eine Gerade, so ist diese der gesuchte Strahl.

167. Das Büschel ist durch fünf Strahlen bestimmt. Sind die fünf Strahlen $L_1 = 0$, $L_2 = 0$, $L_3 = 0$, $L_4 = 0$, $L_5 = 0$, so nimmt man an, die Gleichung des Büschels habe die Gestalt

$$L_1 + L_k f + L_2 f^2 = 0.$$

Es lassen sich dann ähnlich wie in Aufl. 129 Gleichungen aufstellen, welche zur Berechnung der Konstanten in L_k verwendet werden können.

168. Die Strahlen des Büschels schneiden einen beliebigen Strahl in einer Reihe von Punkten, welche dem Strahlenbüschel projektivisch ist. Konstruiert man nun eine beliebige Punktreihe, welche dieser Punktreihe projektivisch ist, so wird sie auch dem Strahlenbüschel projektivisch sein.

169. $\frac{3}{2}u - \frac{1}{3}v + 1 = 0$.

170. Ist

$$L_0 x + M_0 y + N_0 + (L_1 x + M_1 y + N_1) f + (L_2 x + M_2 y + N_2) f^2 = 0$$

die Gleichung des Büschels, und

$$a_0 u + b_0 v + 1 + (a_1 u + b_1 v + 1) f = 0$$

die Gleichung der Punktreihe, so werden die Parameter der gesuchten Strahlen und Punkte der Relation

$$(a_0 + a_1 f)(L_0 + L_1 f + L_2 f^2) + (b_0 + b_1 f)(M_0 + M_1 f + M_2 f^2)$$
$$+ (1 + f)(N_0 + N_1 f + N_2 f^2) = 0$$

genugen müssen. Da diese in Bezug auf f vom dritten Grade ist, so giebt es wenigstens einen reellen Strahl, der durch den ihm entsprechenden Punkt geht; es können aber auch drei solche Strahlen existieren. Gehen vier Strahlen des Büschels durch die ihnen entsprechenden Punkte, so geht jeder Strahl durch den ihm entsprechenden Punkt. Strahlenbüschel und Punktreihe befinden sich in diesem Falle in perspektivischer Lage.

171. Die Gleichungen der Strahlen sind:

$$x - y + 1 = 0,$$

$$x - y + 1 + (2x + y + 3)\frac{25 \pm \sqrt{1153}}{24} + (3x - 2y + 4)\left(\frac{25 \pm \sqrt{1153}}{24}\right)^2 = 0,$$

die der entsprechenden Punkte:

$$5u + 6v + 1 = 0,$$

$$5u + 6v + 1 + (2u + 11v + 1)\frac{25 \pm \sqrt{1153}}{24} = 0.$$

172. Bei Einsetzung der Werte von x_1, y_1 in die Gleichung des Büschels zweiter Ordnung ergiebt sich eine Gleichung, welche in Bezug auf f vom zweiten Grade ist und die Wurzeln $f_1 = 2$, $f_2 = -1$ besitzt. Die gesuchten Strahlen des Büschels zweiter Ordnung sind demnach:

$$19x + 4y + 1 = 0, \quad 7x + 4y + 1 = 0,$$

und die entsprechenden Strahlen des Büschels erster Ordnung:

$$5x + 4y + 3 = 0, \quad x - y = 0.$$

173. Die Gleichungen der beiden Büschel seien

$$L_0 x + M_0 y + N_0 + (L_1 x + M_1 y + N_1) f + (L_2 x + M_2 y + N_2) f^2 = 0,$$
$$Ax + By + C + (A_1 x + B_1 y + C_1) f = 0.$$

Durch den Mittelpunkt des Strahlenbüschels erster Ordnung können nur zwei Strahlen des Büschels zweiter Ordnung gehen; es ist daher nur möglich, daß höchstens zwei Strahlen des einen mit den entsprechenden des andern Büschels zusammenfallen. Dieser Fall tritt ein, wenn die Resultante der beiden Gleichungen

$$(L_2 C_1 - N_2 A_1) f^3 + (L_1 C_1 - N_1 A_1 + L_2 C - N_2 A) f^2$$
$$+ (L_1 C - N_1 A + L_0 C_1 - N_0 A_1) f + L_0 C - N_0 A = 0,$$
$$(M_2 C_1 - N_2 B_1) f^3 + (M_1 C_1 - N_1 B_1 + M_2 C - N_2 B) f^2$$
$$+ (M_1 C - N_1 B + M_0 C_1 - N_0 B_1) f + M_0 C - N_0 B = 0$$

verschwindet.

174. Die Gleichung des geometrischen Ortes ist

$$L_0 L''^2 - L_1 L' L'' + L_2 L'^2 = 0;$$

die Schnittpunkte entsprechender Strahlen liegen demnach auf einer Kurve dritter Ordnung.

175. Die Gleichungen der beiden Büschel lassen sich in diesem Falle auf die Form

$$L_0 + L_1 f + L_2 f^2 = 0,$$
$$L_0 + L_2 f = 0$$

bringen. Durch Elimination von f erhält man

$$L_0 - L_1 + L_2 = 0.$$

Der geometrische Ort des Schnittpunktes entsprechender Strahlen ist demnach eine gerade Linie.

176. Man findet

$$f_1 = -2, \quad f_2 = +2,$$

daher sind die Gleichungen der beiden Strahlen

$$4x + y + 1 = 0, \quad 16x + 11y + 3 = 0,$$

und die Gleichung der Verbindungslinie der beiden entsprechenden Punkte

$$12x + 13y - 37 = 0.$$

177. Zur Bestimmung des Parameters f erhält man eine biquadratische Gleichung. Daraus folgt: Es werden entweder vier oder zwei reelle Strahlen oder kein reeller Strahl des Büschels durch die entsprechenden Punkte gehen können.

178. Die Berührungspunkte entsprechen der Gleichung

$$(M_1 N_0 - M_0 N_1) u + (L_0 N_1 - L_1 N_0) v + (L_1 M_0 - L_0 M_1)$$
$$+ 2 \{ (M_2 N_0 - M_0 N_2) u + (L_0 N_2 - L_2 N_0) v + (L_2 M_0 - L_0 M_2) \} f$$
$$+ \{ (M_2 N_1 - M_1 N_2) u + (L_1 N_2 - L_2 N_1) v + (L_2 M_1 - L_1 M_2) \} f^2 = 0.$$

Die Berührungspunkte bilden demnach eine Punktreihe zweiter Ordnung, welche dem Strahlenbüschel projektivisch ist.

179. Entsprechende Strahlen der beiden Büschel können nur dann zusammenfallen, wenn die Resultante der beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}
&(L_2 N'_2 - L'_2 N_2) f^4 + (L_1 N'_2 - L'_1 N_2 + L_2 N'_1 - L'_2 N_1) f^3 \\
&+ (L_2 N'_0 - L'_2 N_0 + L_1 N'_1 - L'_1 N_1 + L_0 N'_2 - L'_0 N_2) f^2 \\
&+ (L_1 N'_0 - L'_1 N_0 + L_0 N'_1 - L'_0 N_1) f + L_0 N'_0 - L'_0 N_0 = 0, \\
&(M_2 N'_2 - M'_2 N_2) f^4 + (M_1 N'_2 - M'_1 N_2 + M_2 N'_1 - M'_2 N_1) f^3 \\
&+ (M_2 N'_0 - M'_2 N_0 + M_1 N'_1 - M'_1 N_1 + M_0 N'_2 - M'_0 N_2) f^2 \\
&+ (M_1 N'_0 - M'_1 N_0 + M_0 N'_1 - M'_0 N_1) f + M_0 N'_0 - M'_0 N_0 = 0
\end{aligned}$$

verschwindet. Da jede dieser Gleichungen vom vierten Grade ist, so können zwei Kegelschnitte höchstens vier reelle gemeinschaftliche Tangenten besitzen.

180. Bei Einsetzung der Koordinaten des gegebenen Punktes in die Gleichung des ersten Büschels ergiebt sich

$$f_1 = 1, \quad f_2 = -2;$$

die gesuchten Strahlen entsprechen demnach den Gleichungen

$$5x - 3y - 1 = 0, \quad x + 15y + 13 = 0.$$

Die entsprechenden Strahlen des zweiten Büschels gehen durch den Punkt

$$-\tfrac{2}{3}u + \tfrac{1}{5}v + 1 = 0.$$

181. Sind die Gleichungen der beiden Strahlenbüschel

$$L_0 + L_1 f + L_2 f^2 = 0, \quad L'_0 + L'_1 f + L'_2 f^2 = 0,$$

so ist die Gleichung des geometrischen Ortes

$$\begin{vmatrix} L_0 & L_1 & L_2 & 0 \\ 0 & L_0 & L_1 & L_2 \\ L'_0 & L'_1 & L'_2 & 0 \\ 0 & L'_0 & L'_1 & L'_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Kurve, auf welcher die Schnittpunkte liegen, ist demnach von der vierten Ordnung.

182. Die Bedingungsgleichung lautet:

$$4 L_0 L_2 - L_1^2 - k(4 L'_0 L'_2 - L'^2_1) = 0,$$

worin k eine beliebige Konstante ist. Die beiden Büschel können in diesem Falle nur zwei reelle Doppelstrahlen besitzen.

183. Die beiden Büschel besitzen zwei Doppelstrahlen, welche der Gleichung

$$-2x + (19 \mp 5\sqrt{13})y + 15 \mp 4\sqrt{13} = 0$$

entsprechen.

184. Die Gleichungen der beiden Büschel besitzen folgende Gestalt:

$$4x - y + 3 + (x + y - 3)t + (7x + 3y + 2)t^2 = 0,$$
$$4x - y + 3 + (x + y - 3)3t + (7x + 3y + 2)9t^2 = 0.$$

185. Die Gleichungen der Doppelstrahlen sind:

$$x - y - 1 = 0, \quad x - 3y - 2 = 0,$$

die Gleichungen der beiden Büschel:

$$x - y - 1 + (3x + y + 2)t + (x - 3y - 2)t^2 = 0,$$
$$x - y - 1 + (3x + y + 2)2t + (x - 3y - 2)4t^2 = 0.$$

Die beiden Büschel werden von einer Hyperbel eingehüllt, deren Gleichung ist:

$$5x^2 + 22xy - 11y^2 + 24x - 16y - 4 = 0.$$

186. Die Schnittpunkte entsprechender Strahlen liegen auf einer Hyperbel, deren Gleichung ist:

$$9x^2 + 48xy - 25y^2 + 51x - 37y - 10 = 0.$$

Welche Punkte hat diese Hyperbel mit der Enveloppe der Strahlenbüschel

$$5x^2 + 22xy - 11y^2 + 24x - 16y - 4 = 0$$

gemein?

187. Man ziehe in der Ebene des Kegelschnittes zwei Gerade g_1 und g_2 und ziehe von einem Punkte A der Geraden g_1 eine Tangente an den Kegelschnitt, welche g_2 in B schneiden möge. Läßt man nun A auf g_1 und B auf g_2 fortrücken, doch so, daß AB immer Tangente des Kegelschnittes bleibt, so werden die von A und B an den Kegelschnitt gelegten zweiten Tangenten zwei projektivische Strahlenbüschel zweiter Ordnung bilden.

188. Durch die gegebenen Strahlen ist die Enveloppe K bestimmt. Man zieht eine Gerade g, welche t_1 in A, t_2 in B, t_3 in C, t_4 in D schneidet, und legt von A und B aus die zweiten Tangenten an den Kegelschnitt, von denen die durch A gehende t'_1 in A_1, die durch B gehende t'_2 in B_1 schneiden möge. Durch die beiden Punkte A_1 und B_1 legt man sodann die Gerade g_1. Die zweite durch D gelegte Tangente des Kegelschnittes möge dann g_1 in einem Punkte D_1 schneiden. Zieht man von diesem die zweite Tangente an K, so entspricht dieselbe dem Strahl t_4. Die beiden Geraden g und g_1 mögen sich im Punkte P schneiden. Die

Tangenten des Kegelschnittes, welche durch diesen Punkt P gehen, sind die Doppelstrahlen der beiden Strahlenbüschel.

189. Die Parametergleichung besitzt in diesem Falle die Gestalt

$$fk - (f + k)a + b = 0.$$

Dieselbe erleidet bei einer Vertauschung von f und k keine Veränderung.

190. Die Bedingungsgleichung lautet:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ f_1 + k_1 & f_2 + k_2 & f_3 + k_3 \\ f_1 k_1 & f_2 k_2 & f_3 k_3 \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$(f_1 - k_2)(f_2 - k_3)(f_3 - k_1) - (k_1 - f_2)(k_2 - f_3)(k_3 - f_1) = 0.$$

191. Die Parameter sind:

$$f_1 = 1,\ k_1 = 3;\ f_2 = -1,\ k_2 = \tfrac{7}{3};\ f_3 = -2,\ k_3 = \tfrac{9}{4}.$$

Die beiden Büschel sind involutorische, denn es ist

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & \frac{4}{3} & \frac{1}{4} \\ 3 & -\frac{7}{3} & -\frac{9}{2} \end{vmatrix} = 0.$$

Die Parametergleichung ist:

$$fk - 2(f + k) + 5 = 0.$$

192. $\frac{38}{13}u + \frac{10}{13}v + 1 = 0.$

193. Die Parametergleichung ist

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & \frac{1}{2} & f + k \\ 0 & -\frac{3}{2} & fk \end{vmatrix} = 0,$$

oder

$$fk - (f + k) + 2 = 0.$$

Im allgemeinen sind in jedem Büschel zwei Strahlen vorhanden, welche auf den entsprechenden Strahlen lotrecht stehen. Im vorliegenden Falle sind die beiden Strahlenpaare imaginär.

194. Die beiden Büschel können nur zwei Doppelstrahlen besitzen, deren Gleichungen sind:

$$L_0 + (a + \sqrt{a^2 - b})L_1 + (2a^2 - b + 2a\sqrt{a^2 - b})L_2 = 0,$$
$$L_0 + (a - \sqrt{a^2 - b})L_1 + (2a^2 - b - 2a\sqrt{a^2 - b})L_2 = 0.$$

Beispiel. $41y - 7x - 73 = 0, \quad 5y - 11x + 19 = 0.$

195. $10u + 3 = 0, \quad 234u - 104v + 43 = 0.$

196. Die Parametergleichung besitzt in diesem Falle die Gestalt

$$f + k = 0.$$

197. $2x + y - 1 + (x + 2y + 3)f + (x + y - 5)f^2 = 0,$

$$2x + y - 1 + (x + 2y + 3)k + (x + y - 5)k^2 = 0,$$
$$f + k = 0.$$

198. Die Gleichungen der Doppelstrahlen sind:

$$x + 2y + 3 = 0, \quad 2x + y - 1 = 0;$$

die Gleichungen der involutorischen Büschel:

$$x + 2y + 3 + (x + y - 5)f + (2x + y - 1)f^2 = 0,$$
$$x + 2y + 3 + (x + y - 5)k + (2x + y - 1)k^2 = 0,$$
$$f + k = 0.$$

199. Sind die Gleichungen der Büschel

$$L_0x + M_0y + N_0 + (L_1x + M_1y + N_1)f + (L_2x + M_2y + N_2)f^2 = 0,$$
$$L_0x + M_0y + N_0 + (L_1x + M_1y + N_1)k + (L_2x + M_2y + N_2)k^2 = 0,$$

und die Parametergleichung

$$fk - (f + k)a + b = 0,$$

so laufen die beiden Doppelstrahlen parallel, wenn

$$L_1M_0 - L_0M_1 + 2a(L_2M_0 - L_0M_2) + b(L_2M_1 - L_1M_2) = 0$$

ist, dagegen durchschneiden sich dieselben rechtwinklig, wenn

$$L_0{}^2 + M_0{}^2 + 2a(L_0L_1 + M_0M_1) + 2(2a^2 - b)(L_0L_2 + M_0M_2)$$
$$+ b(L_1{}^2 + M_1{}^2) + 2ab(L_1L_2 + M_1M_2) + b^2(L_2{}^2 + M_2{}^2) = 0$$

ist.

200. $31u^2 - 126uv + 19v^2 + 22u - 38v + 3 = 0.$

201. Sind die Gleichungen der Punktreihen

$$A_0 + A_1f + A_2f^2 = 0, \quad A_0 + A_1k + A_2k^2 = 0,$$

und die Parametergleichung

$$fk - (f + k)a + b = 0,$$

so erhält man nach Elimination von f und k

$$A_0 + aA_1 + bA_2 = 0.$$

Die Verbindungslinien von je zwei entsprechenden Punkten gehen also alle durch einen Punkt. Derselbe wird das Involutionscentrum genannt.

Beispiel. $1\frac{5}{6}u + \frac{2}{3}v + 1 = 0.$

202. Zieht man durch den Punkt C Sekanten in den Kegelschnitt, so schneidet jede die Kurve in zwei entsprechenden Punkten der Involution. Die von C an den Kegelschnitt gelegten Tangenten berühren den Kegelschnitt in den Doppelpunkten. Die Konstruktion derselben läßt sich leicht ausführen, wenn man zwei von C ausgehende Sekanten zur Herstellung eines vollständigen Vierseits benutzt. Liegt C innerhalb des Kegelschnittes, so sind die Doppelpunkte imaginär, die involutorischen Punktreihen sind elliptische; befindet sich C außerhalb des Kegelschnittes, so sind die Doppelpunkte reell, die involutorischen Punktreihen hyperbolische; ist endlich C ein Punkt des Kegelschnittes, so fallen mit diesem alle Punkte der einen Reihe zusammen, die Punktreihen heißen in diesem Falle parabolische.

203. Die beiden Schnittpunkte liegen auf der Geraden, welche die beiden Doppelpunkte der involutorischen Punktreihen verbindet. (S. die Konstruktion in der vorhergehenden Lösung.)

204. Durch die gegebenen vier Punkte lassen sich drei Linienpaare legen. Der Schnittpunkt der Linien eines Paares kann jedesmal als Involutionscentrum angesehen und zur Konstruktion der Punktreihen gebraucht werden. Es ergeben sich demnach drei Gruppen von Punktreihen, und zwar stehen die beiden Punktreihen jeder Gruppe in Involution.

205. Sind die Gleichungen der involutorischen Strahlenbüschel

$$L_0 + L_1 f + L_2 f^2 = 0, \quad L_0 + L_1 k + L_2 k^2 = 0,$$

ferner die Parametergleichung

$$fk - (f + k)a + b = 0,$$

so ist die Gleichung des geometrischen Ortes

$$L_0 + aL_1 + bL_2 = 0.$$

Die Schnittpunkte von je zwei entsprechenden Strahlen liegen demnach auf einer Geraden, der Involutionsachse der beiden Büschel.

Beispiel. $14x - 5y + 22 = 0$.

206. Man zieht von jedem Punkte der Geraden l die beiden Tangenten an den Kegelschnitt k, so bilden dieselben die beiden involutorischen Strahlenbüschel zweiter Ordnung. Die Tangenten des Kegelschnittes an den Punkten, in welchen k von l geschnitten wird, sind die Doppelstrahlen. Die Strahlenbüschel werden hyperbolische

genannt, wenn l den Kegelschnitt in zwei reellen Punkten schneidet, die Doppelstrahlen also reell sind; elliptische, wenn l und k keine reellen Schnittpunkte haben, die Doppelstrahlen also imaginär sind; parabolische, wenn der Kegelschnitt k von l berührt wird, die beiden Doppelstrahlen also mit l zusammenfallen.

207. Die Gleichungen der Doppelstrahlen sind:

$$61x - 335y + 391 = 0, \quad 11x - 5y - 19 = 0.$$

208 α) Sind a und b die Halbachsen der Ellipse, so beschreibt man um den Mittelpunkt der Ellipse mit $\sqrt{a^2 + b^2}$ als Radius einen Kreis und zieht von den Punkten, in denen dieser Kreis die Involutionsachse schneidet, die Tangentenpaare an die Ellipse. Man erhält demnach zwei Tangentenpaare, welche der Anforderung entsprechen; dieselben können entweder reell oder imaginär sein oder in ein Paar zusammenfallen.

β) Ist der Kegelschnitt eine Hyperbel mit den Halbachsen a und b, so beschreibt man um den Mittelpunkt derselben einen Kreis mit dem Radius $\sqrt{a^2 - b^2}$ und zieht von den Punkten, in denen dieser die Involutionsachse schneidet, die beiden Tangentenpaare.

γ) Werden die involutorischen Strahlenbüschel von einer Parabel eingehüllt, so zieht man von dem Punkte, in dem die Direktrix die Involutionsachse schneidet, die beiden Tangenten an die Parabel. In diesem Falle können demnach nur zwei entsprechende Strahlen aufeinander lotrecht stehen.

209. Verbindet man die Schnittpunkte von a_1, b_1 und a_2, b_2, ebenso die von a_1, b_2 und a_2, b_1 durch gerade Linien, so gehen diese beiden Geraden durch den Schnittpunkt der beiden Doppelstrahlen.

210. Die Berührungspunkte bilden zwei involutorische Punktreihen zweiter Ordnung. Die betreffenden Verbindungslinien werden sich demnach alle in einem Punkte, dem Involutionscentrum, durchschneiden.

211. Die beiden entsprechenden Strahlen werden von den beiden Doppelstrahlen und die beiden entsprechenden Punkte von den beiden Doppelpunkten harmonisch getrennt.

212. Ist die Gleichung der Punktreihe zweiter Ordnung

$$a_0 u + b_0 v + 1 + (a_1 u + b_1 v + 1) f + (a_2 u + b_2 v + 1) f^2 = 0,$$

so lassen sich die Gleichungen der Seiten des Sehnensechsecks auf die Form bringen:

$$\text{I)} \quad \left| \begin{array}{l} A_1 + B_1(f_1 + f_2) + C_1 f_1 f_2 = 0, \\ A_1 + B_1(f_2 + f_3) + C_1 f_2 f_3 = 0, \\ A_1 + B_1(f_3 + f_4) + C_1 f_3 f_4 = 0, \\ A_1 + B_1(f_4 + f_5) + C_1 f_4 f_5 = 0, \\ A_1 + B_1(f_5 + f_6) + C_1 f_5 f_6 = 0, \\ A_1 + B_1(f_6 + f_1) + C_1 f_6 f_1 = 0, \end{array} \right.$$

wo

$$\begin{aligned} A_1 &= (b_1 - b_0)x + (a_0 - a_1)y + a_1 b_0 - a_0 b_1, \\ B_1 &= (b_2 - b_0)x + (a_0 - a_2)y + a_2 b_0 - a_0 b_2, \\ C_1 &= (b_2 - b_1)x + (a_1 - a_2)y + a_2 b_1 - a_1 b_2 \end{aligned}$$

sind.

Multipliziert man die erste dieser Gleichungen I) mit $(f_3 - f_5)(f_6 - f_4)$ und subtrahiert davon das Produkt aus der vierten Gleichung und $(f_6 - f_2)(f_3 - f_1)$,

multipliziert man ferner die zweite Gleichung mit $(f_1 - f_5)(f_6 - f_4)$ und subtrahiert davon das Produkt aus der fünften Gleichung und $(f_4 - f_2)(f_3 - f_1)$,

subtrahiert man endlich das Produkt aus der sechsten Gleichung und $(f_2 - f_4)(f_5 - f_3)$ von dem Produkte aus der dritten Gleichung und $(f_2 - f_6)(f_5 - f_1)$, so erhält man in allen drei Fällen:

$$\begin{aligned} & A_1 \{f_1 f_2 - f_2 f_3 + f_3 f_4 - f_4 f_5 + f_5 f_6 - f_6 f_1\} \\ + & B_1 \{f_1 f_2 (f_4 + f_5) - f_2 f_3 (f_5 + f_6) + f_3 f_4 (f_6 + f_1) - f_4 f_5 (f_1 + f_2) \\ & \quad + f_5 f_6 (f_2 + f_3) - f_6 f_1 (f_3 + f_4)\} \\ + & C_1 \{f_1 f_2 f_3 f_4 - f_2 f_3 f_4 f_5 + f_3 f_4 f_5 f_6 - f_4 f_5 f_6 f_1 + f_5 f_6 f_1 f_2 - f_6 f_1 f_2 f_3\} = 0 \end{aligned}$$

d. h. die Schnittpunkte je zweier gegenüberliegenden Seiten eines Sechsecks, welches einem Kegelschnitte eingeschrieben ist, liegen auf einer Geraden, welche die Pascalsche Linie genannt wird.

213. Zwischen den sechs Punkten lassen sich 15 Gerade ziehen, welche zur Begrenzung von sechzig Sechsecken benutzt werden können. Es lassen sich demnach 60 Pascalsche Linien konstruieren.

214. Konstruiert man ein Sechseck, dessen Ecken die gegebenen Punkte sind, so müssen die Schnittpunkte von jedem Paar Gegenseiten auf einer Geraden liegen.

215. Die Involutionsachse ist in diesem Falle als Pascalsche Linie anzusehen, die Eckpunkte des Tangentensechsecks werden demnach auf einem Kegelschnitte liegen müssen.

216. Sind die Gleichungen der sechs gegebenen Strahlen

$$L_0 + L_1 f_1 + L_2 f_1^2 = 0,$$
$$L_0 + L_1 f_2 + L_2 f_2^2 = 0,$$
$$L_0 + L_1 f_3 + L_2 f_3^2 = 0,$$
$$L_0 + L_1 f_4 + L_2 f_4^2 = 0,$$
$$L_0 + L_1 f_5 + L_2 f_5^2 = 0,$$
$$L_0 + L_1 f_6 + L_2 f_6^2 = 0,$$

so lassen sich die Gleichungen der drei Diagonalen in folgende Form bringen:

$$(L_0+L_1 f_1+L_2 f_1^2)(f_2-f_4)(f_2-f_5)-(L_0+L_1 f_2+L_2 f_2^2)(f_1-f_4)(f_1-f_5)=0,$$
$$(L_0+L_1 f_2+L_2 f_2^2)(f_3-f_5)(f_3-f_6)-(L_0+L_1 f_3+L_2 f_3^2)(f_2-f_5)(f_2-f_6)=0,$$
$$(L_0+L_1 f_3+L_2 f_3^2)(f_4-f_6)(f_4-f_1)-(L_0+L_1 f_4+L_2 f_4^2)(f_3-f_6)(f_3-f_1)=0.$$

Es läßt sich leicht zeigen, daß diese drei Geraden durch einen Punkt, den sogenannten Brianchonschen Punkt, gehen.

217. Da die gegebenen Tangenten in beliebiger Reihenfolge gerechnet werden können, so können durch dieselben sechzig umschriebene Sechsecke gebildet werden; demnach werden sich im ganzen sechzig Brianchonsche Punkte finden lassen.

218. In dem von den Geraden gebildeten Sechsecke müssen die Diagonalen zwischen je zwei gegenüberliegenden Ecken durch einen Punkt gehen.

219. Verbindet man je zwei entsprechende Punkte durch eine Gerade, so schneiden sich die drei Verbindungslinien in dem Involutionscentrum, welches als der Brianchonsche Punkt anzusehen ist.

220. Betrachtet man das Viereck als ein Pascalsches Sechseck, von dem zwei gegenüberliegende Seiten in Tangenten übergegangen sind, so findet man, daß die Schnittpunkte je zweier Gegenseiten, sowie die zweier Tangenten an gegenüberliegenden Eckpunkten auf derselben Geraden liegen.

221. Sind A, B, C, D die vier gegebenen Punkte und berührt t den Kegelschnitt im Punkte A, so betrachtet man jeden der Punkte B, C, D der Reihe nach als Gegeneckpunkt

von A, konstruiert durch Verlängerung der gegenüberliegenden Seiten in jedem Falle die Pascalsche Gerade und erhält so jedes Mal einen zweiten Punkt einer gesuchten Tangente

222. Da sich die Diagonalen des Tangentenvierecks und des Sehnenvierecks, dessen Ecken die Berührungspunkte sind, in einem Punkte schneiden, so kann man mit Leichtigkeit geometrische Örter für die gesuchten Berührungspunkte finden.

223. Verlängert man t_1 und P_2P_3 bis zum Schnitt, ebenso t_2 und P_3P_1, so erhält man zwei Punkte einer Geraden, welche von P_1P_2 in einem Punkte der gesuchten Tangente geschnitten wird.

224. Sind P_2, P_3, P_4, P_5 Punkte der gegebenen Punktreihe, so ist durch die Schnittpunkte von g und P_3P_4, sowie der Geraden P_1P_2 und P_4P_5 die Lage einer Pascalschen Linie bestimmt. Verlängert man P_2P_3 bis zum Schnitt mit der Pascalschen Linie in X, so trifft die Gerade XP_5 die gegebene Gerade g in dem gesuchten Punkte.

225. Gehören die Strahlen t_2, t_3, t_4, t_5 zu dem gegebenen Büschel, und verbindet man den Punkt P_1 mit dem Schnittpunkte t_3t_4, ferner die Schnittpunkte t_1t_2 und t_4t_5, so erhält man einen Brianchonschen Punkt, der sich zur Konstruktion der zweiten durch P_1 gehenden Tangente benutzen läßt.

226. Entspricht der gegebenen Gleichung ein Strahlenbüschel zweiter Ordnung, so sind $B_0 = 0$, $B_2 = 0$ Tangenten der Enveloppe, $B_1 = 0$ die Polare des Schnittpunktes der beiden Tangenten. Stellt die gegebene Gleichung dagegen eine Punktreihe zweiter Ordnung dar, so sind $B_0 = 0$, $B_2 = 0$ Punkte des Trägers, dagegen $B_1 = 0$ der Pol der Geraden, welche $B_0 = 0$, $B_2 = 0$ verbindet.

227. $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ sind die Gleichungen von zwei Tangenten des Erzeugnisses, dagegen $L_0 = 0$ die Gleichung der Berührungssehne derselben oder der Polare des Schnittpunktes der beiden Tangenten.

228. Die Gleichung der Sekante ist

$$L_0 - f^2 L_2 = 0.$$

Verbindet man einen Schnittpunkt dieser Sekante und der Enveloppe mit dem Berührungspunkte von $L_2 = 0$, so ist die Gleichung dieser Geraden

$$L_1 - kL_2 = 0,$$

worin k durch die Bedingung bestimmt werden muß, daß die Gerade durch einen der beiden Schnittpunkte von $L_0 - f^2 L_2 = 0$ und $L_1{}^2 - 4 L_0 L_2 = 0$ geht.

Sind L'_0, L'_1, L'_2 die speziellen Werte von L_0, L_1, L_2 für einen dieser Punkte, so ergeben sich zur Bestimmung des Verhältnisses zwischen f und k die drei Relationen:

$$L'_1 - kL'_2 = 0, \quad L'_0 - f^2 L'_2 = 0, \quad L'_1{}^2 - 4 L'_0 L'_2 = 0,$$

mit deren Hilfe man

$$k = \pm 2f$$

findet. Die Gleichungen der beiden Geraden sind sonach:

$$L_1 + 2fL_2 = 0, \quad L_1 - 2fL_2 = 0.$$

Daraus folgt: Die beiden Strahlen bilden mit den beiden Geraden $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ ein harmonisches Strahlenbüschel, denn der Wert des Doppelverhältnisses ist gleich -1.

229. Man verbinde die Punkte P und P_1 durch eine Gerade, welche p in A schneiden möge, und bestimme den P_1 zugeordneten harmonischen Punkt P_4. Zieht man die Geraden PP_2 und PP_3, so kann man zwei weitere Punkte des Kegelschnittes finden. Durch die gegebenen und gefundenen Punkte ist alsdann die Lage des Kegelschnittes vollständig bestimmt.

230. $P_1 P_3$ schneide p_1 in A_1, dann ist der P_3 zugeordnete harmonische Punkt P_4 ein Punkt der gesuchten Kurve. Durch Verbindung der Punkte P_2 und P_3 findet man in entsprechender Weise einen Punkt P_5 der Kurve. Zieht man ferner die Geraden $P_2 P_4$ und $P_1 P_5$, so lassen sich auf denselben zwei weitere Punkte P_6 und P_7 des Kegelschnittes durch Konstruktion ermitteln. Durch die Punkte P_3, P_4, P_5, P_6, P_7 ist aber die Lage des Kegelschnittes bestimmt.

231. Die Gleichungen der beiden Sekanten sind:

$$2L_0 + L_1(f_1 + f_2) + 2L_2 f_1 f_2 = 0,$$
$$2L_0 + L_1(f_3 + f_4) + 2L_2 f_3 f_4 = 0.$$

Konstruiert man mit Hilfe derselben ein Vierseit, so findet man leicht die Gleichung der Polare

$$L_0 \{ (f_3 + f_4) - (f_1 + f_2) \} + L_1(f_3 f_4 - f_1 f_2) + L_2 \{ f_1 f_3 (f_4 - f_2) + f_2 f_4 (f_3 - f_1) \} = 0.$$

232. Die Gleichung der Polare ist

$$2 L_0 + L_1 (f_1 + f_2) + 2 L_2 f_1 f_2 = 0,$$

demnach ist der zugehörige Pol der Schnittpunkt der beiden Tangenten

$$L_0 + L_1 f_1 + L_2 f_1^2 = 0,$$
$$L_0 + L_1 f_2 + L_2 f_2^2 = 0.$$

233. Mit Hilfe der Lösungen 201 und 205 findet man leicht, daß die Involutionsachse die Polare des Involutionscentrums bezüglich des Kegelschnittes ist.

234. Jedem Eckpunkt des Pascalschen Sechsecks entspricht eine Seite des Brianchonschen und jeder Ecke des Brianchonschen Sechsecks eine Seite des Pascalschen. Man ersieht daraus sofort, daß die Verbindungslinie zweier Ecken des Brianchonschen Sechsecks den Schnittpunkt der beiden entsprechenden Seiten zum Pol hat. Demnach wird auch die Pascalsche Linie die Polare des Brianchonschen Punktes bezüglich des Kegelschnittes sein.

235. Die Verbindungslinie je zweier Diagonalpunkte ist die Polare des dritten bezüglich des Kegelschnittes. Die Diagonaleckpunkte sind demnach die Ecken eines Polardreiecks. Von den Diagonaleckpunkten liegt immer der eine innerhalb, die beiden andern außerhalb des Kegelschnittes. Sind die drei Diagonaleckpunkte gegeben, so lassen sich unendlich viele zugehörige Vierecke konstruieren, deren Seiten Sehnen des Kegelschnittes sind.

236. Jede Diagonale ist die Polare des Schnittpunktes der beiden andern bezüglich des Kegelschnittes. Die drei Diagonalen bilden sonach ein Polardreiseit. Zwei dieser Diagonalen schneiden den Kegelschnitt in reellen Punkten, die dritte dagegen in imaginären Punkten.

237. Es sei $L_0 + L_1 f + L_2 f^2 = 0$ die Gleichung des Strahlenbüschels und der gegebene Pol P der Schnittpunkt der beiden Strahlen

$$L_0 + L_1 f_1 + L_2 f_1^2 = 0, \quad L_0 + L_1 f_2 + L_2 f_2^2 = 0,$$

dann ist die Gleichung der Polare

$$2 L_0 + L_1 (f_1 + f_2) + 2 L_2 f_1 f_2 = 0,$$

also der konjugierte Pol Q der Schnittpunkt der beiden Geraden

$$L_0 + L_1 f_1 + L_2 f_1^2 + k(L_0 + L_1 f_2 + L_2 f_2^2) = 0,$$
$$2 L_0 + L_1 (f_1 + f_2) + 2 L_2 f_1 f_2 = 0.$$

Die Doppelpunkte der Involution sind diejenigen Punkte, in denen die Sekante

$$L_0 + L_1 f_1 + L_2 f_1^2 + k(L_0 + L_1 f_2 + L_2 f_2^2) = 0$$

von den beiden Strahlen

$$L_0 + L_1 f_2 + L_2 f_2^2 + \sqrt{k}\,\{2L_0 + L_1(f_1 + f_2) + 2L_2 f_1 f_2\} = 0,$$
$$L_0 + L_1 f_2 + L_2 f_2^2 - \sqrt{k}\,\{2L_0 + L_1(f_1 + f_2) + 2L_2 f_1 f_2\} = 0$$

geschnitten wird.

238. Die Polaren bilden ein Büschel zweiter Ordnung, dessen Gleichung ist

$$-2(x + y - 4) + (-3x - y + 12)f + (3x - 16y + 9)f^2 = 0.$$

Dasselbe wird von einem Kegelschnitte eingehüllt, welcher der Gleichung

$$-33x^2 + 98xy + 127y^2 + 96x - 560y + 144 = 0$$

entspricht.

239. Der geometrische Ort des Poles ist ein Kegelschnitt, welcher der Gleichung

$$749x^2 - 1298xy + 608y^2 + 504x - 450y + 63 = 0$$

entspricht.

240. Die Gleichung der Enveloppe ist

$$2uv - 2v^2 + 24u + 4v + 7 = 0.$$

Die Strahlen des Büschels werden demnach von einer Ellipse eingehüllt.

241. Das Büschel der konjugierten Strahlen entspricht der Gleichung

$$4y - x + 3 + f(6y - 4x + 12) = 0,$$

demnach ist die Gleichung des Erzeugnisses

$$x^2 + 9xy - 2y^2 - 5x - 11y + 6 = 0;$$

dasselbe ist eine Hyperbel.

242. Die Gleichung der Kurve ist

$$4x^2 + 6xy - 90y^2 - 116x + 270y = 0.$$

Die den Schnittpunkten konjugierten Pole liegen demnach auf einer Hyperbel. Dieselbe geht durch den Mittelpunkt des Büschels und durch den Pol der gegebenen Geraden bezüglich des Kegelschnittes.

243. Die konjugierten Polaren bilden ein Strahlenbüschel zweiter Ordnung, dessen Gleichung ist

$$90y + 450 + (748y - 135x + 35)l' + (-242y - 792x + 44)l'^2 = 0.$$

244. Die Gerade p möge die Seite s_1 in S_1, die Seite s_2 in S_2, die Seite s_3 in S_3 schneiden. Verbindet man den Punkt P mit den Punkten S_1, S_2, S_3 und konstruiert durch jeden dieser Punkte den der Seite des Dreiecks konjugierten harmonischen Strahl, so erhält man noch drei Tangenten des gesuchten Kegelschnittes. Über die Fortsetzung der Lösung vergl. Heft II, Lös. 664.

245. Nach der vorhergehenden Lösung kann man zunächst eine dritte und eine vierte Tangente ziehen und nach Lösung 229 einen zweiten Punkt P_2 des gesuchten Kegelschnittes finden. Die vier Tangenten bilden ein vollständiges Vierseit. Verbindet man P_1 oder P_2 mit den sechs Ecken desselben, so erhält man in jedem Falle drei Strahlenpaare, welche in Involution sind. Die Doppelstrahlen der Büschel werden Tangenten in P_1 und P_2 sein.

246. Schneidet p_1 die Tangente t in S_1, ferner p_2 die Tangente t in S_2, so kann man sofort durch S_1 und S_2 zwei Tangenten des Kegelschnittes t_1 und t_2 ziehen. Die so gefundenen Tangenten können dann in derselben Weise zur Konstruktion weiterer Tangenten benutzt werden.

247. Man ziehe von dem Punkte P_1 Strahlen nach den Ecken des Polardreiecks, verlängere jeden bis zum Schnitt mit der Gegenseite und bestimme durch Konstruktion auf jedem Strahle den P_1 konjugierten harmonischen Punkt. Man erhält so drei Punkte des Kegelschnittes, die mit den beiden gegebenen die Kurve vollständig bestimmen.

248. Die Punkte, in welchen die Seiten des Polardreiecks von einer Tangente geschnitten werden, lassen sich als Mittelpunkte harmonischer Strahlenbüschel betrachten. Auf diese Weise kann man beliebig viele Tangenten des gesuchten Kegelschnittes konstruieren.

249. Die Gerade PC möge p in R und AB in S schneiden, dann liegen die beiden Punkte, welche die beiden Strecken PR und CS harmonisch teilen, auf dem zu konstruierenden Kegelschnitte. Verbindet man P mit A, ferner P mit B, so findet man in gleicher Weise noch zwei Punktpaare des Kegelschnittes.

250. Verbindet man die Punkte A, B, C, D durch gerade Linien, so erhält man ein vollständiges Viereck. Die Punkte, in welchen die sechs Seiten desselben die Gerade $P_1 P_2$ schneiden, befinden sich in Involution. Sind M_1 und M_2 die Doppelpunkte der involutorischen Punktreihen, so werden die beiden Punkte X und Y, welche sowohl die Strecke $P_1 P_2$ als die Strecke $M_1 M_2$ harmonisch teilen, Punkte des zu konstruierenden Kegelschnittes.

251. Verbindet man zwei der gegebenen fünf Punkte mit den übrigen, so erhält man drei Strahlenpaare von zwei projektivischen Strahlenbüscheln. Ein durch P gelegter Strahl wird von diesen Strahlenpaaren in drei Punktpaaren geschnitten. Zu diesen Punktpaaren bestimmt man die Doppelpunkte, dann wird der Abstand zwischen diesen durch den Punkt P und einen Punkt der gesuchten Polare harmonisch geteilt. Zieht man durch P einen zweiten Strahl, so läßt sich auf demselben in gleicher Weise ein zweiter Punkt der Polare finden.

252. Man bestimme zunächst die Berührungspunkte der gegebenen Tangenten, dann werden durch drei Strahlenpaare, welche sich durch dieselben legen lassen, auf der Geraden p drei Punktpaare verzeichnet. Konstruiert man in den Doppelpunkten der Punktreihen, zu denen diese Punktpaare gehören, die Tangenten, so schneiden sich diese in dem gesuchten Pol.

253. Sind die Gleichungen der involutorischen Strahlenbüschel

$$L_0 x + M_0 y + N_0 + (L_1 x + M_1 y + N_1) f + (L_2 x + M_2 y + N_2) f^2 = 0,$$
$$L_0 x + M_0 y + N_0 + (L_1 x + M_1 y + N_1) k + (L_2 x + M_2 y + N_2) k^2 = 0,$$

so wird die Parametergleichung entweder

$$L_1 M_0 - L_0 M_1 + (L_2 M_0 - L_0 M_2)(f + k) + (L_2 M_1 - L_1 M_2) k f = 0$$

oder

$$f - k = 0$$

sein. Im letzteren Falle würde jeder Strahl mit dem entsprechenden zusammenfallen.

Beispiel. $5 - (f + k) - 9 k f = 0.$

254. Die Gleichung der Involutionsachse ist

$$\begin{vmatrix} L_0 & L_1 & L_2 \\ M_0 & M_1 & M_2 \\ N_0 & N_1 & N_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Dieselbe fällt also mit der unendlich fernen Geraden zusammen.

255. Die Gleichung einer beliebigen Sekante der Kurve ist

$$2(L_0x + M_0y + N_0) + (L_1x + M_1y + N_1)(f_1 + k_1) + 2(L_2x + M_2y + N_2)f_1k_1 = 0;$$

derselben entspricht ein Durchmesser, wenn die beiden Parameter der Gleichung

$$L_1M_0 - L_0M_1 + (L_2M_0 - L_0M_2)(f_1 + k_1) + (L_2M_1 - L_1M_2)f_1k_1 = 0$$

genügen.

256. Die Gleichung eines beliebigen Durchmessers der Kurve läßt sich auf die Gestalt bringen:

$$\begin{gathered} 2(L_2M_0 - L_0M_2)(L_0x + M_0y + N_0) - (L_1M_0 - L_0M_1)(L_1x + M_1y + N_1) \\ + \{2(L_2M_1 - L_1M_2)(L_0x + M_0y + N_0) - 2(L_1M_0 - L_0M_1)(L_2x + M_2y + N_2)\}f \\ + \{(L_2M_1 - L_1M_2)(L_1x + M_1y + N_1) - 2(L_2M_0 - L_0M_2)(L_2x + M_2y + N_2)\}f^2 = 0. \end{gathered}$$

Der Mittelpunkt ist daher derjenige Punkt, in dem sich die drei Geraden

$$\begin{gathered} 2(L_2M_0 - L_0M_2)(L_0x + M_0y + N_0) - (L_1M_0 - L_0M_1)(L_1x + M_1y + N_1) = 0, \\ (L_2M_1 - L_1M_2)(L_0x + M_0y + N_0) - (L_1M_0 - L_0M_1)(L_2x + M_2y + N_2) = 0, \\ (L_2M_1 - L_1M_2)(L_1x + M_1y + N_1) - 2(L_2M_0 - L_0M_2)(L_2x + M_2y + N_2) = 0 \end{gathered}$$

durchschneiden.

Beispiel. Die Gleichung eines Durchmessers ist:

$$16x + 17y + 15 + (48x + 34y + 44)f + (-32x + 85y - 23)f^2 = 0;$$

demnach sind die Koordinaten des gesuchten Mittelpunktes:

$$x_1 = -\tfrac{7}{8}, \quad y_1 = -\tfrac{1}{17}.$$

257. Die Gleichungen von zwei konjugierten Durchmessern der einhüllenden Kurve sind:

$$\begin{gathered} 8x + 2 + (14x - 22y - 18)f + (13x + 11y + 14)f^2 = 0, \\ 22x - 22y - 16 + (66x + 22y + 38)f + (22x - 66y - 59)f^2 = 0. \end{gathered}$$

258. Die konjugierten Durchmesser der Enveloppe bilden zwei konzentrische involutorische Strahlenbüschel, deren Doppelstrahlen die gesuchten Asymptoten sind. Die Gleichung eines Durchmessers der Kurve läßt sich auf die Form bringen

$$49x - 29y + 23 + (76x + 128y + 24)fk = 0;$$

demnach sind die Gleichungen der beiden Asymptoten:

$$\begin{gathered} 49x - 29y + 23 + (83 - \tfrac{13}{2}\sqrt{163})(76x + 128y + 24) = 0, \\ 49x - 29y + 23 + (83 + \tfrac{13}{2}\sqrt{163})(76x + 128y + 24) = 0. \end{gathered}$$

259. Die gesuchten Achsen sind zwei konjugierte Durchmesser und müssen demnach mit den beiden Asymptoten ein harmonisches Strahlenbüschel bilden; da sie zu einander rechtwinklig stehen, so werden sie zugleich die Halbierungslinien der Asymptotenwinkel sein. Die Gleichungen derselben sind:

$$\frac{(132 + 39\sqrt{11})x + (66 + 21\sqrt{11})y - 48 - 15\sqrt{11}}{\sqrt{43362 + 13068\sqrt{11}}}$$
$$\pm \frac{(132 - 39\sqrt{11})x + (66 - 21\sqrt{11})y - 48 + 15\sqrt{11}}{\sqrt{43362 - 13068\sqrt{11}}} = 0.$$

260. Sind die gegebenen Punkte P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, so lassen sich zwei derselben, z. B. P_1, P_2, als Mittelpunkte zweier projektivischen Strahlenbüschel erster Ordnung in schiefer Lage betrachten, von denen drei Strahlenpaare bekannt sind. Zieht man durch jeden der Punkte P_1 und P_2 zu je einem Strahl des einen Büschels einen parallelen Strahl und bestimmt den entsprechenden Strahl, so hat man zwei Paare paralleler Sehnen und kann mit Hilfe derselben zwei geometrische Örter des gesuchten Mittelpunktes konstruieren.

261. Man konstruiert zunächst zwei Paare paralleler Sehnen und mit Hilfe derselben zwei Paare konjugierter Durchmesser. Bestimmt man sodann diejenigen Strahlen, welche mit jedem der Paare konjugierter Durchmesser ein harmonisches Strahlenbüschel bilden, so erhält man die Asymptoten der Kurve und durch Halbierung der von diesen eingeschlossenen Winkel die Achsen.

262. Nach der vorhergehenden Lösung kann man zunächst die Asymptoten und Achsen der Hyperbel konstruieren. Sodann legt man durch den Mittelpunkt einen Kreis, auf dem die Schnittpunkte mit den konjugierten Durchmessern zwei projektivische Punktreihen zweiter Ordnung in Involution bilden. Zieht man durch das Involutionscentrum eine Sekante in den Kreis, so daß der Peripheriewinkel über derselben gleich α wird, so erhält man zwei Punkte, welche auf den gesuchten Durchmessern liegen.

263. Bestimmt man für zwei aufeinander folgende Strahlen die Berührungspunkte und verbindet dieselben durch eine gerade Linie, so ist die Gerade, welche durch den Schnittpunkt der Tangenten und den Halbierungspunkt der Berührungssehne geht,

ein geometrischer Ort des Mittelpunktes. Zieht man sodann zwei Paare konjugierter Durchmesser, so werden die Strahlen, welche mit jedem Durchmesserpaare ein harmonisches Büschel bilden, die Asymptoten der Enveloppe sein.

264. Da ein Durchmesser jede ihm konjugierte Sehne halbiert, so kann man mit Hilfe eines jeden der gegebenen Punkte drei weitere Punkte der Kurve finden. Lage und Gestalt der Kurve lassen sich demnach bestimmen.

265. Verlängert man eine der gegebenen Tangenten bis zum Durchschnitt mit den gegebenen Durchmessern, so läßt sich die Figur zu einem der gesuchten Kurve umschriebenen Parallelogramm vervollständigen. Mit Hilfe der beiden gegebenen Tangenten lassen sich demnach sechs andere Tangenten durch Konstruktion ermitteln.

266. Siehe Lösung 264.

267. Man findet leicht ein zweites Paar konjugierter Durchmesser und hat dann zunächst das Strahlenpaar zu konstruieren, welches mit jedem Paar konjugierter Durchmesser ein harmonisches Strahlenbüschel bildet.

268. Die gegebenen Stücke lassen sich zur Konstruktion eines Pascalschen Sechsecks verwenden. Über die weitere Ausführung der Konstruktion siehe die Aufl. 251.

269. Verbindet man die Schnittpunkte von je zwei aufeinander folgenden Tangenten mit dem gegebenen Mittelpunkte, so kann man ein Brianchonsches Sechseck konstruieren, welches sich zur Entwickelung des gesuchten Resultates verwenden läßt. Vergl. Aufl. 252.

270. Zur Bestimmung der Koordinaten der betreffenden Mittelpunkte lassen sich die Gleichungen aufstellen:

$$F(x^2-y^2)+2Ey-2Dx+A-C=0,$$
$$Fxy-Dy-Ex+B=0,$$

wenn

$$A=a_1^{\,2}-4a_0a_2,\quad B=a_1b_1-2(a_2b_0+a_0b_2),$$
$$C=b_1^{\,2}-4b_0b_2,\quad D=a_1c_1-2(a_2c_0+a_0c_2),$$
$$E=b_1c_1-2(b_2c_0+b_0c_2),\quad F=c_1^{\,2}-4c_0c_2$$

ist. Diese Mittelpunkte sind die Brennpunkte des Trägers der Punktreihe. Aus den vorstehenden Gleichungen ersieht man sofort, daß eine Kurve 2. Ordnung im allgemeinen vier Brennpunkte besitzt, von denen zwei reell, zwei imaginär sind.

271. Da in diesem Falle $F = 0$ ist, so nehmen die aufgestellten Gleichungen die Gestalt an:

$$2Ey - 2Dx + A - C = 0,$$
$$Dy + Ex - B = 0.$$

Die Parabel besitzt demnach nur einen endlichen reellen Brennpunkt.

Beispiel. $x = 2\frac{43}{80}$, $y = \frac{41}{80}$.

272. Der Strahl wird dem Büschel angehören, wenn die Resultante der beiden Gleichungen

$$f^2(iL_2 - M_2) + f(iL_1 - M_1) + iL_0 - M_0 = 0,$$
$$f^2(N_2 + L_2[x_1 + iy_1]) + f(N_1 + L_1[x_1 + iy_1]) + N_0 + L_0(x_1 + iy_1) = 0$$

gleich Null ist. Setzt man in dieser Bedingungsgleichung sowohl den reellen als auch den imaginären Teil gleich Null, so lassen sich mit Hilfe dieser Gleichungen x_1, y_1 die Koordinaten der Brennpunkte der Enveloppe berechnen.

273. Zwei entsprechende Punkte auf der Hauptachse sind:

$$x' = \frac{20}{x_1}, \quad x'' = \frac{3}{4}x_1.$$

Die Schnittpunkte bilden demnach zwei entgegengesetzt verlaufende konjektivische Punktreihen, welche in Involution sind. Die Doppelpunkte derselben sind die Brennpunkte der Kurve.

Ferner sind

$$y' = \frac{5}{y_1}, \quad y'' = -3y_1$$

zwei entsprechende Punkte auf der Nebenachse. Die Schnittpunkte auf der Nebenachse bilden sonach zwei gleichstimmig verlaufende konjektivische Punktreihen in Involution. Reelle Doppelpunkte können dieselben nicht besitzen.

274. Tangente und Normale schneiden die Hauptachse in zwei entsprechenden Punkten zweier konjektivischen Punktreihen, welche in Involution sind. Die Strecke zwischen diesen beiden Punkten wird durch die beiden Brennpunkte harmonisch geteilt.

275. Da M der Pol von PF ist, so sind MF und PF zwei konjugierte Gerade, sie müssen sich demnach rechtwinklig durchschneiden.

276. Betrachtet man die eine Direktrix des Kegelschnittes als Y Achse, das vom Brennpunkt auf diese gefällte Lot als X Achse, so ist die Gleichung des Kegelschnittes

$$\delta^2 y^2 + (\delta^2 - e^2)x^2 - 2k\delta^2 x + k^2\delta^2 = 0,$$

die des Kreises
$$(x - k)^2 + y^2 = r^2.$$

Die Enveloppe entspricht der Gleichung:

$$\{r^4\delta^2 - e^2(r^2 - k^2)^2\}u^2 + r^4\delta^2 v^2 + 2ke^2(r^2 - k^2)u - k^2e^2 = 0;$$

dieselbe ist ein Kreis, dessen Radius gleich $\frac{\delta r^2}{ke}$ und dessen Mittelpunktsgleichung

$$\frac{r^2 - k^2}{k}u - 1 = 0$$

ist.

277. Die Pole liegen auf einer Geraden

$$Ny + Mkx - Mk^2 = 0,$$

welche durch den gemeinschaftlichen Brennpunkt geht.

278. Die drei gegebenen Punkte können zu einer Punktreihe 2. Ordnung gehörend betrachtet werden, welche der Gleichung

$$a_0u + b_0v + 1 + (a_1u + b_1v + c_1)f + (a_2u + b_2v + 1)f^2 = 0$$

entspricht. Man bestimmt die unbekannten Größen a_1, b_1, c_1 mit Hilfe der Gleichungen:

$$a_3 = \frac{a_0 + a_1f + a_2f^2}{1 + c_1f + f^2}, \quad b_3 = \frac{b_0 + b_1f + b_2f^2}{1 + c_1f + f^2},$$

$$(a_1^2 - 4a_0a_2) - (b_1^2 - 4b_0b_2) - 2\{a_1c_1 - 2(a_2 + a_0)\}a$$
$$+ 2\{b_1c_1 - 2(b_2 + b_0)\}b + (c_1^2 - 4)(a^2 - b^2) = 0,$$

$$a_1b_1 - 2(a_2b_0 + a_0b_2) - \{b_1c_1 - 2(b_2 + b_0)\}a - \{a_1c_1 - 2(a_2 + a_0)\}b$$
$$+ (c_1^2 - 4)ab = 0$$

nach vorausgegangener Elimination von f. Da die Eliminationsgleichungen bezüglich der Unbekannten vom zweiten Grade sind, so werden sich vier Kurven 2. Ordnung konstruieren lassen, welche der gestellten Anforderung genügen.

279. Die Gleichungen, welche sich zur Bestimmung der konstanten Koeffizienten in der Gleichung

$$Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Du + 2Ev + F = 0$$

aufstellen lassen, sind linear. Es existiert demnach nur ein Kegelschnitt, welcher der Anforderung der Aufgabe genügt, und zwar ist dieser eine Ellipse, welche der Gleichung

$$53u^2 + 53v^2 + 941u - 307v - 2920 = 0$$

entspricht.

280. Mit Hilfe der Gleichungen

$$\begin{gathered}A - C - 2Dx_1 + 2Ey_1 + F(x_1^2 - y_1^2) = 0,\\ B - Ex_1 - Dy_1 + Fx_1y_1 = 0,\\ A - C - 2Dx_2 + 2Ey_2 + F(x_2^2 - y_2^2) = 0,\\ B - Ex_2 - Dy_2 + Fx_2y_2 = 0\end{gathered}$$

lassen sich die Verhältnisse der Konstanten

$$A - C,\ B,\ D,\ E,\ F$$

eindeutig bestimmen. Da die Differenz der Koeffizienten von u^2 und v^2 unveränderlich sein muß für alle Kurven des Systems, so folgt, daß der Gleichung

$$(A + k)u^2 + 2Buv + (C + k)v^2 + 2Du + 2Ev + F = 0$$

ein System konfokaler Kegelschnitte entspricht, wenn man k alle möglichen reellen Werte erteilt.

281. Entspricht das System der konfokalen Kegelschnitte der Gleichung

$$(A + k)u^2 + 2Buv + (C + k)v^2 + 2Du + 2Ev + F = 0,$$

so läßt sich die Gleichung des Tangentenpaares, welches sich von einem Punkte (x_1, y_1) an eine Kurve des Systems legen läßt, auf die Form bringen:

$$\begin{gathered}(A+k-2Dx_1+Fx_1^2)(y-y_1)^2-2(B-Ex_1-Dy_1+Fx_1y_1)(y-y_1)(x-x_1)\\ + (C + k - 2Ey_1 + Fy_1^2)(x - x_1)^2 = 0;\end{gathered}$$

demnach ist die Gleichung des Linienpaares, welches die von den Tangenten gebildeten Winkel halbiert:

$$\begin{gathered}(y - y_1)^2 + \frac{A - C - 2Dx_1 + 2Ey_1 + F(x_1^2 - y_1^2)}{B - Ex_1 - Dy_1 + Fx_1y_1}(x - x_1)(y - y_1)\\ - (x - x_1)^2 = 0.\end{gathered}$$

Da diese letztere Relation unabhängig ist von der Variabeln k, so folgt, daß die Winkel, welche von den aus einem Punkte an die Kurven eines konfokalen Systems gezogenen Tangenten gebildet werden, durch ein und dasselbe Linienpaar halbiert werden.

282. Zur Bestimmung von k läßt sich die Gleichung

$$(3 - x_1 - 2y_1 + 3x_1y_1)^2 - (2 + k - 4x_1 + 3x_1^2)(5 + k - 2y_1 + 3y_1^2) = 0$$

aufstellen, welche bei Einsetzung der gegebenen Werte die Gestalt

$$k^2 + 87k = 35$$

annimmt. Da dieselbe vom zweiten Grade ist, so werden zwei Kurven des Systems durch den gegebenen Punkt gehen müssen. Dieselben entsprechen der Gleichung:

$$\frac{\pm\sqrt{7709} - 83}{2} u^2 + 6uv + \frac{\pm\sqrt{7709} - 77}{2} v^2 + 4u + 2v + 3 = 0.$$

283. Entspricht das System konfokaler Kegelschnitte der Gleichung

$$(A + k)u^2 + 2Buv + (C + k)v^2 + 2Du + 2Ev + F = 0,$$

so sind die Koordinaten eines Poles bezüglich einer beliebigen Kurve dieses Systems:

$$x = \frac{(A + k)L_1 + BM_1 + DN_1}{DL_1 + EM_1 + FN_1},$$

$$y = \frac{BL_1 + (C + k)M_1 + EN_1}{DL_1 + EM_1 + FN_1}.$$

Durch Elimination von k ergiebt sich als Gleichung des geometrischen Ortes

$$M_1(DL_1 + EM_1 + FN_1)x - L_1(DL_1 + EM_1 + FN_1)y$$
$$+ L_1(BL_1 + CM_1 + EN_1) - M_1(AL_1 + BM_1 + DN_1) = 0.$$

Die Pole liegen demnach auf einer Geraden, welche auf der gegebenen Geraden lotrecht steht.

284. Man zieht zunächst die zweite Direktrix und bestimmt sodann die beiden Scheitel der Kurve, d. h. diejenigen Punkte, welche die beiden Strecken zwischen je einem Brennpunkt und der zugehörigen Direktrix harmonisch teilen.

285. Teilt man den Abstand des Brennpunktes von der Direktrix nach dem durch die gegebenen Stücke bekannten Verhältnis, so erhält man den einen Scheitel. Der diesem Punkte zugeordnete harmonische Punkt ist der zweite Scheitel.

286. Man findet leicht den Berührungspunkt der gegebenen Tangente und kann somit die Lösung dieser Aufgabe auf die der vorigen zurückführen.

287. Verbindet man F mit P_1 und mit dem Schnittpunkt der beiden gegebenen Tangenten, so kann man zwei geometrische Örter für den zweiten Brennpunkt konstruieren.

288. Durch je zwei der gegebenen Punkte läßt sich ein Kreis legen, welcher ein geometrischer Ort des der Direktrix zugehörenden Brennpunktes ist.

289. Über dem Abschnitt der Geraden t, welcher von den beiden Direktrixen begrenzt ist, als Grundlinie läßt sich ein gleichschenkliges Dreieck konstruieren, dessen Schenkel durch die Brennpunkte des Kegelschnittes gehen. Wie findet man die Spitze dieses Dreiecks?

290. Das Büschel entspricht der Gleichung

$$L_1 L'_2 - \lambda L'_1 L_2 = 0,$$

wenn λ alle möglichen reellen Werte erteilt werden.

291. Der Gleichung entspricht eine Kegelschnittschar. Die Gleichungen der Ecken des umschriebenen Vierecks sind:

$$a_1 u + b_1 v + 1 = 0, \quad a_2 u + b_2 v + 1 = 0, \quad a'_1 u + b'_1 v + 1 = 0,$$
$$a'_2 u + b'_2 v + 1 = 0.$$

Mit Hilfe derselben lassen sich die Koordinaten der gemeinschaftlichen Tangenten aller Kegelschnitte der Schar berechnen.

292. Ein Punktpaar entspricht der Gleichung:

$$\begin{aligned}
&(u - u_1)^2 [\{M_1 M'_2 - (M_1 N'_2 + M'_2 N_1) v_1 + N_1 N'_2 v_1^2\} \\
&\quad - f\{M'_1 M_2 - (M'_1 N_2 + M_2 N'_1) v_1 + N'_1 N_2 v_1^2\}] \\
&- (u - u_1)(v - v_1)[\{(L_1 M'_2 - L'_2 M_1) - (M_1 N'_2 + M'_2 N_1) u_1 - (L_1 N'_2 + L'_2 N_1) v_1 + 2 N_1 N'_2 u_1 v_1\} \\
&- f\{(L'_1 M_2 + L_2 M'_1) - (M'_1 N_2 + M_2 N'_1) u_1 - (L'_1 N_2 + L_2 N'_1) v_1 + 2 N'_1 N_2 u_1 v_1\}] \\
&\quad + (v - v_1)^2 [\{L_1 L'_2 - (L_1 N'_2 + L'_2 N_1) u_1 + N_1 N'_2 u_1^2\} \\
&\quad - f\{L'_1 L_2 - (L'_1 N_2 + L_2 N'_1) u_1 + N'_1 N_2 u_1^2\}] = 0.
\end{aligned}$$

Die Schnittpunkte bilden demnach zwei projektivische Punktreihen, welche in Involution sind.

293. Die Berührungspunkte der gesuchten Kegelschnitte sind die Doppelpunkte der involutorischen Punktreihen, in denen die Gerade von den Kurven des Büschels geschnitten wird. Es werden sich also im allgemeinen zwei Kegelschnitte bestimmen lassen, welche der Anforderung der Aufgabe genügen. Die Gleichung der involutorischen Punktreihen ist:

$$8(u + 2)^2 + 15(u + 2)(v - 2) + 7(v - 2)^2$$
$$= f\{21(u + 2)^2 + 40(u + 2)(v - 2) + 16(v - 2)^2\};$$

demnach entsprechen die gesuchten Kegelschnitte der Gleichung:

$$128(x - y - 1)(x - 2y + 3) - (25 \pm \sqrt{561})(2x - y + 1)(2x + y - 3) = 0.$$

294. Die Gleichung des Tangentenpaares läßt sich auf die Form bringen:

$$(x - x_1)^2 \{[b_1 b'_2 - (b_1 + b'_2)y_1 + y_1^2] - f[b'_1 b_2 - (b'_1 + b_2)y_1 + y_1^2]\}$$
$$- (x - x_1)(y - y_1)\{[a_1 b'_2 + a'_2 b_1 - (b_1 + b'_2)x_1 - (a_1 + a'_2)y_1 + 2x_1 y_1]$$
$$- f[a'_1 b_2 + a_2 b'_1 - (b'_1 + b_2)x_1 - (a'_1 + a_2)y_1 + 2x_1 y_1]\}$$
$$+ (y - y_1)^2 \{[a_1 a'_2 - (a_1 + a'_2)x_1 + x_1^2] - f[a'_1 a_2 - (a'_1 + a_2)x_1 + x_1^2]\} = 0.$$

Die sämtlichen Tangenten, welche sich von dem gegebenen Punkte an die Kegelschnitte legen lassen, bilden demnach zwei konzentrische projektivische Strahlenbüschel, welche sich in Involution befinden.

295. Die gesuchten Kegelschnitte werden in dem gegebenen Punkte von den Doppelstrahlen der konzentrischen involutorischen Strahlenbüschel berührt; sie entsprechen demnach der Gleichung:

$$2(1u + 5v + 1)(-1u - 3v + 1)$$
$$+ (153 \pm 9\sqrt{285})(-2u + 1v + 1)(4u - 1v + 1) = 0.$$

296. Die Kegelschnitte, welche von den Geraden G_1 und G_2 in den gegebenen Punkten berührt werden, können als ein Büschel oder als eine Schar betrachtet werden.

a) Die Gleichung des Büschels läßt sich in die Form

$$(2y - x - 8)(y - 2x + 6) - f(y - 6x + 18)^2 = 0$$

bringen; daher entspricht der Kegelschnitt, welcher von der Geraden $x + 1 = 0$ berührt wird, der Gleichung:

$$3520(2y - x - 8)(y - 2x + 6) + 529(y - 6x + 18)^2 = 0.$$

b) Die Gleichung der Schar ist in Linienkoordinaten:

$$(4u + 6v + 1)(3u + 1) - f(6\tfrac{2}{3}u + 7\tfrac{1}{3}v + 1)^2 = 0,$$

demnach ist die des gesuchten Kegelschnittes:

$$704(4u + 6v + 1)(3u + 1) - 27(20u + 22v + 3)^2 = 0.$$

297. Die Gleichungen der Ecken des Kardinaldreiecks sind:

$$4u - 5v + 1 = 0, \quad 5u + 4v + 1 = 0,$$
$$\tfrac{40}{129}u + \tfrac{173}{387}v + 1 = 0,$$

die der Seiten:

$$33y - 25x - 7 = 0, \quad 21y + 31x - 19 = 0,$$
$$y - 9x + 41 = 0.$$

298. $16y - 29x + 23 = 0, \quad 3y - 8x + 32 = 0,$
$$8311y - 5971x - 7271 = 0.$$

299. Man erhält in diesem Falle unendlich viele Kardinaldreiseite, indem man je zwei konjugierte Pole auf der Geraden $y - 6x + 18 = 0$ mit dem Berührungspol $20u + 22v + 3 = 0$ verbindet. Zwei derselben schrumpfen in die beiden Geraden

$$2y - x - 8 = 0 \text{ und } y - 2x + 6 = 0$$

zusammen.

300. Die Polaren des gegebenen Punktes bilden ein Büschel, dessen Gleichung

$$21x + 42y - 56 - f(118x + 186y - 14) = 0$$

ist; demnach sind die Koordinaten des konjugierten Poles:

$$x_2 = -9\tfrac{9}{25}, \quad y_2 = 6\tfrac{1}{75}.$$

301. $1194y - 11339x + 29094 = 0.$

302. Der geometrische Ort ist eine Gerade, deren Koordinaten durch die Gleichungen

$$\tfrac{1}{2}(a_1 + a'_2)u + \tfrac{1}{2}(b_1 + b'_2)v + 1 = 0,$$
$$\tfrac{1}{2}(a'_1 + a_2)u + \tfrac{1}{2}(b'_1 + b_2)v + 1 = 0$$

bestimmt sind. Die Lage der Geraden läßt sich leicht bestimmen. Auf welche Weise? Diese Gerade ist der unendlich fernen Geraden konjugiert.

303. Der gesuchte geometrische Ort ist ein Kegelschnitt, welcher der Gleichung

$$16x^2 + xy + 3y^2 - 94x - 7y + 30 = 0$$

entspricht. Derselbe geht durch die Ecken des Kardinaldreiecks.

304. Der Kegelschnitt degeneriert in zwei Gerade. Die eine Gerade fällt mit der Seite des Kardinaldreiecks zusammen, welche dem Eckpunkte, durch welchen die gegebene Gerade geht, gegenüber liegt. Die zweite Gerade bildet mit der gegebenen Geraden und den beiden andern Seiten des Kardinaldreiecks ein harmonisches Büschel. Die Rechnung ist für den Fall durchzuführen, daß die Gleichung der gegebenen Geraden

$$x - 3y + 7 = 0$$

ist.

305. Die konjugierten Strahlen bilden ein Büschel zweiter Ordnung, welches der Gleichung

$$4x + 29y - 144 + (377x - 39y - 1248)\operatorname{tg}\varphi - (321x + 114y - 1104)\operatorname{tg}^2\varphi = 0$$

entspricht. Dasselbe wird demnach von einem Kegelschnitt eingehüllt, dessen Gleichung ist:

$$(4x + 29y - 144)(1284x + 456y - 4416) + (377x - 39y - 1248)^2 = 0.$$

306. Die Gleichungen der beiden projektivischen Strahlenbüschel sind:

$$22x + 32y - 62 - f(97x + 153y - 11) = 0,$$
$$7x + 11y - 23 - f(56x + 88y - 8) = 0;$$

demnach die des Erzeugnisses:

$$553x^2 + 1590xy + 1133y^2 - 1340x - 2072y + 243 = 0.$$

In welcher Beziehung würden die beiden projektivischen Strahlenbüschel zu einander stehen, wenn die Verbindungslinie der beiden gegebenen Punkte durch einen Kardinalpunkt des Kegelschnittbüschels ginge?

307. Die Gleichungen der beiden projektivischen Punktreihen sind:

$$20u + 32v + 12 - f(v + 3) = 0,$$
$$22u + 34v + 12 - f(12u - 7v + 3) = 0;$$

demnach ist die des Erzeugnisses:

$$40u^2 + 37uv - 43v^2 + 23u - 17v = 0.$$

Verbindet man also je zwei entsprechende Punkte der projektivischen Punktreihen durch gerade Linien, so bilden diese ein Strahlenbüschel zweiter Ordnung, welches von einer Parabel eingehüllt wird. Wie würde sich das Resultat gestalten, wenn der Schnittpunkt der beiden gegebenen Geraden auf einer Seite des Kardinaldreiseits der gegebenen Kegelschnittschar läge?

308. Die Gleichungen der projektivischen Punktreihen sind:

$$5u + 10v + 5 - f(8u + 14v + 10) = 0,$$
$$10u + 5v + f(24u - 3v + 15) = 0;$$

demnach werden die Verbindungslinien entsprechender Punkte von einem Kegelschnitte eingehüllt, dessen Gleichung in Linienkoordinaten die Form

$$40u^2 + 81uv + 8v^2 + 59u + 37v + 15 = 0$$

besitzt.

309. Die Gleichungen der projektivischen Strahlenbüschel sind:

$$5x + y - 10 - f(x - 3) = 0,$$
$$14x + 6y - 44 - f(y + 2) = 0;$$

demnach liegen die Schnittpunkte entsprechender Strahlen auf einer Hyperbel, deren Gleichung

$$14x^2 + xy - y^2 - 96x - 10y + 152 = 0$$

ist.

310. Die Verbindungslinien bilden ein Strahlenbüschel erster Ordnung, dessen Gleichung

$$L_2 x + M_2 y + N_2 - f(L'_1 x + M'_1 y + N'_1) = 0$$

ist. Der Mittelpunkt dieses Büschels liegt auf der Verbindungslinie der beiden andern Grundpunkte.

311. Führt man statt der Punktkoordinaten Linienkoordinaten ein, so findet man durch eine ähnliche Entwicklung wie in der vorhergehenden Aufgabe, daß der geometrische Ort eine gerade Linie ist, welche durch den Schnittpunkt derjenigen Grundlinien geht, die den Kegelschnitt K nicht berühren.

312. Die Durchmesser sind die Polaren des unendlich fernen Punktes der Geraden g bezüglich der Kegelschnitte des Büschels, sie bilden demnach ein Büschel erster Ordnung, dessen Mittelpunkt der jenem unendlich fernen Punkte konjugierte Punkt ist.

313. Das Strahlenbüschel gehört der zweiten Ordnung an und wird von einer Parabel eingehüllt, deren Gleichung ist:

$$Eu^2 + (EM - D)uv - DMv^2 - (B + CM)u + (A + BM)v = 0.$$

314. Das Doppelverhältnis der vier Schnittpunkte hat den Wert

$$\frac{2A_1C_2 + 2A_2C_1 - B_1B_2 + \sqrt{B_1^2 - 4A_1C_1}\sqrt{B_2^2 - 4A_2C_2}}{2A_1C_2 + 2A_2C_1 - B_1B_2 - \sqrt{B_1^2 - 4A_1C_1}\sqrt{B_2^2 - 4A_2C_2}},$$

wenn

$$A_1 = C - 2Ev_1 + Fv_1^2, \quad A_2 = C' - 2E'v_1 + F'v_1^2,$$
$$B_1 = 2(B - Eu_1 - Dv_1 + Fu_1v_1), \quad B_2 = 2(B' - E'u_1 - D'v_1 + F'u_1v_1),$$
$$C_1 = A - 2Du_1 + Fu_1^2, \quad C_2 = A' - 2D'u_1 + F'u_1^2$$

ist.

315. Sind u_1, v_1 die Koordinaten einer Geraden, so sind die Gleichungen der Punktpaare, in denen dieselbe die gegebenen Kegelschnitte schneidet:

$$(C - 2Ev_1 + Fv_1^2)(u - u_1)^2 - 2(B - Eu_1 - Dv_1 + Fu_1v_1)(u - u_1)(v - v_1)$$
$$+ (A - 2Du_1 + Fu_1^2)(v - v_1)^2 = 0,$$
$$(C_1 - 2E_1v_1 + F_1v_1^2)(u - u_1)^2 - 2(B_1 - E_1u_1 - D_1v_1 + F_1u_1v_1)(u - u_1)(v - v_1)$$
$$+ (A_1 - 2D_1u_1 + F_1u_1^2)(v - v_1)^2 = 0.$$

Sollen diese beiden Punktpaare harmonisch zu einander sein, so müssen die Koordinaten der Geraden u_1, v_1 der Bedingungsgleichung

$$\begin{aligned}&(CF_1 - 2EE_1 + C_1F)u_1^2 + 2\{DE_1 + D_1E - (BF_1 + B_1F)\}u_1v_1 \\ &+ (AF_1 - 2DD_1 + A_1F)v_1^2 + 2\{BE_1 + B_1E - (CD_1 + C_1D)\}u_1 \\ &+ 2\{BD_1 + B_1D - (AE_1 + A_1E)\}v_1 + AC_1 - 2BB_1 + A_1C = 0\end{aligned}$$

genügen. Das Strahlenbüschel gehört demnach der zweiten Ordnung an und wird von einem Kegelschnitte eingehüllt.

316. Vertauscht man in dem Ausdrucke, welcher in Lösung 314 aufgestellt wurde, die Linienkoordinaten u_1, v_1 mit den Punktkoordinaten x_1, y_1, so erhält man den Wert des Doppelverhältnisses der vier Strahlen.

317. Man gelangt zu dem Resultate, wenn man in Lösung 315 Punkt und Linienkoordinaten miteinander vertauscht. Der geometrische Ort ist demnach ein Kegelschnitt, welcher der Gleichung

$$\begin{aligned}&(CF_1 - 2EE_1 + C_1F)x^2 + 2\{DE_1 + D_1E - (BF_1 + B_1F)\}xy \\ &+ (AF_1 - 2DD_1 + A_1F)y^2 + 2\{BE_1 + B_1E - (CD_1 + C_1D)\}x \\ &+ 2\{BD_1 + B_1D - (AE_1 + A_1E)\}y + AC_1 - 2BB_1 + A_1C = 0\end{aligned}$$

entspricht.

318. Zwei beliebige der gegebenen Grundlinien lassen sich als Träger von (ähnlichen) projektivischen Punktreihen, deren Gegenpunkte in der Unendlichkeit liegen, ansehen. Von diesen Punktreihen sind drei Punktpaare bekannt, demnach läßt sich zu jedem Punkte der einen Reihe der entsprechende der andern finden. Die Verbindungslinien entsprechender Punkte aber werden Tangenten der Parabel sein.

319. Die Tangenten bilden mit der Asymptote ein der Hyperbel umschriebenes Fünfeck. Bestimmt man nach Heft II, Lösung 665 die Berührungspunkte von zwei Tangenten, so kann man zwei Punkte der zweiten Asymptote finden. Ferner lassen sich zwei der gegebenen Tangenten als Träger projektivischer Punktreihen betrachten, auf denen drei entsprechende Punktpaare gegeben sind. Ein viertes Punktpaar läßt sich demnach finden und somit eine weitere Tangente ziehen.

320. Verbindet man jeden der Punkte A und B mit den Punkten C und D und zieht ferner durch A und B Parallelen

zu der Geraden g, so erhält man drei Strahlenpaare von zwei projektivischen Strahlenbüscheln, deren Erzeugnis die gesuchte Hyperbel ist.

321. AB und BC lassen sich als Träger zweier ähnlichen projektivischen Punktreihen betrachten, deren Erzeugnis die gesuchte Parabel ist. Drei Punktpaare sind bekannt, nämlich B und D, A und C, endlich die beiden unendlich fernen Punkte der Träger, die Parabel ist sonach bestimmt.

322. Es seien A und B die Mittelpunkte der Strahlenbüschel, welche die Hyperbel erzeugen. Bekannt sind drei Strahlenpaare AC und BC, ferner die Strahlen, welche man durch A und B zu den gegebenen Geraden g_1 und g_2 parallel ziehen kann.

323. Verbindet man P mit den Endpunkten des Durchmessers d, so erhält man die Richtungen eines zweiten Paares konjugierter Durchmesser. Die konjugierten Durchmesser bilden zwei konzentrische involutorische Strahlenbüschel, in denen diejenigen entsprechenden Strahlen, welche aufeinander lotrecht stehen, die gesuchten Achsen sind.

324. Man zieht zunächst durch P eine Gerade, welche g_1 in A_1, g_2 in A_2 schneiden möge, so daß $A_1P = PA_2$ wird. Ist O der Schnittpunkt von g_1 und g_2, so werden sich auf diesen beiden Geraden, die als Träger projektivischer Punktreihen anzusehen sind, zwei entsprechende Punkte B_1, B_2 sehr leicht finden lassen, da $OA_1 . OA_2 = OB_1 . OB_2$ sein muß.

325. Die Enveloppe ist eine Kurve dritter Klasse und zwar entspricht dieselbe der Gleichung

$$\begin{aligned} &F(u-v)(L-M)(L-Nu)(Nv-M) \\ &+ (DMu - 2EMv + DLv)(L-Nu)(Mu-Lv) \\ &+ (EMu - 2DLu + ELv)(Nv-M)(Mu-Lv) \\ &+ \{(AL-BM)u - (BL-CM)v\}(Mu-Lv)^2 = 0. \end{aligned}$$

326. Da je zwei entsprechende Strahlen bezüglich des zu konstruierenden Kegelschnittes konjugiert sein sollen, so müssen die beiden Doppelstrahlen Tangenten des Kegelschnittes sein. Man bestimmt demnach zunächst die Doppelstrahlen. Sind diese reell, so handelt es sich darum, einen Kegelschnitt zu konstruieren, der von fünf gegebenen Geraden berührt wird.

327. Der zu konstruierende Kegelschnitt muß durch die beiden Doppelpunkte der involutorischen Punktreihen gehen. Sind diese Doppelpunkte reell, so läßt sich die Lösung der Aufgabe zurückführen auf Heft II, Lösung 660.

328. Ein Kegelschnitt, welcher von drei Geraden berührt wird, entspricht im allgemeinen einer Gleichung von der Form

$$(A_1 + fA_2 + kA_3)u^2 + 2(B_1 + fB_2 + kB_3)uv + (C_1 + fC_2 + kC_3)v^2 + 2(D_1 + fD_2 + kD_3)u + 2(E_1 + fE_2 + kE_3)v + F_1 + fF_2 + kF_3 = 0,$$

in der f und k als veränderliche Koeffizienten anzusehen sind. Da die Doppelpunkte der involutorischen Punktreihen auf dem Kegelschnitte liegen sollen, so lassen sich zur Bestimmung der Größen f und k zwei Relationen entwickeln. Diese beiden Gleichungen sind vom zweiten Grade. Es werden sich sonach vier Kegelschnitte bestimmen lassen, welche den Anforderungen der Aufgabe genügen.

329. Da der Kegelschnitt durch die drei Eckpunkte des Dreiecks hindurchgehen soll, so kann man der Gleichung desselben die Form

$$(A_1 + fA_2 + kA_3)x^2 + 2(B_1 + fB_2 + kB_3)xy + (C_1 + fC_2 + kC_3)y^2 + 2(D_1 + fD_2 + kD_3)x + 2(E_1 + fE_2 + kE_3)y + F_1 + fF_2 + kF_3 = 0$$

erteilen. Die beiden Doppelstrahlen der Büschel müssen Tangenten der Kurve sein. Entwickelt man demnach die Koordinaten der Doppelstrahlen, so kann man mit Hilfe derselben zur Bestimmung von f und k zwei Gleichungen aufstellen. Da dieselben bezüglich der Größen f und k vom zweiten Grade sind, so werden sich vier Kegelschnitte bestimmen lassen, die durch die Eckpunkte des Dreiecks gehen und in der angegebenen Beziehung zu den konzentrischen Strahlenbüscheln stehen.

330. Die Tangenten bilden ein Strahlenbüschel zweiter Ordnung, dessen Gleichung ist

$$10x - 10y - 10 + (75x - 26y + 29)f + (34x + 17y - 51)f^2 = 0.$$

Die Enveloppe ist demnach ein Kegelschnitt, welcher der Gleichung

$$(40x - 40y - 40)(34x + 17y - 51) - (75x - 26y + 29)^2 = 0$$

entspricht. Aus der Gleichung des Tangentenbüschels ersieht man sofort, daß dieser Kegelschnitt von den Verbindungslinien der drei übrigen Grundpunkte berührt wird.

331. Die Koordinaten des Berührungspunktes einer Tangente sind:

$$x = \frac{3f^2 - 27f + 12}{f^2 - 10f + 12}, \quad y = \frac{-2f^2 + 11f + 60}{f^2 - 10f + 12};$$

demnach ist die Gleichung des geometrischen Ortes:

$$4[7x + 2y - 17]^2 - [61x + 17y - 146][3x + y - 7] = 0.$$

Durch welche Ecken des Grundvierseits geht dieser Kegelschnitt?

332. Ist

$$(A_1 + fA_2 + kA_3)u^2 + 2(B_1 + fB_2 + kB_3)uv + (C_1 + fC_2 + kC_3)v^2$$
$$+ 2(D_1 + fD_2 + kD_3)u + 2(E_1 + fE_2 + kE_3)v + F_1 + fF_2 + kF_3 = 0$$

die Gleichung eines Kegelschnittes, der von den drei gegebenen Geraden berührt wird, so ergiebt sich die Gleichung des geometrischen Ortes durch Elimination von f und k aus den Relationen

$$x = \frac{D_1 + fD_2 + kD_3}{F_1 + fF_2 + kF_3}, \quad y = \frac{E_1 + fE_2 + kE_3}{F_1 + fF_2 + kF_3},$$
$$(F_1 + fF_2 + kF_3)[A_1 + C_1 + f(A_2 + C_2) + k(A_3 + C_3)]$$
$$- [(E_1 + fE_2 + kE_3)^2 + (D_1 + fD_2 + kD_3)^2] = 0.$$

Die Mittelpunkte liegen, wie man sofort ersieht, auf einem Kegelschnitte.

333. Da die Gleichung eines Kegelschnittes, welcher von drei gegebenen Geraden berührt wird, auf die Form

$$(A_1 + fA_2 + kA_3)u^2 + 2(B_1 + fB_2 + kB_3)uv + (C_1 + fC_2 + kC_3)v^2$$
$$+ 2(D_1 + fD_2 + kD_3)u + 2(E_1 + fE_2 + kE_3)v + (F_1 + fF_2 + kF_3) = 0$$

gebracht werden kann, so erhält man durch Elimination von f und k aus den Relationen

$$F_1 + fF_2 + kF_3 = 0,$$
$$A_1 - C_1 - 2D_1x + 2E_1y + f(A_2 - C_2 - 2D_2x + 2E_2y) + k(A_3 - C_3 - 2D_3x + 2E_3y) = 0,$$
$$B_1 - E_1 - D_1 + f(B_2 - E_2x - D_2y) + k(B_3 - E_3x - D_3y) = 0$$

die Gleichung des geometrischen Ortes:

$$\begin{vmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \\ A_1 - C_1 - 2D_1x + 2E_1y & A_2 - C_2 - 2D_2x + 2E_2y & A_3 - C_3 - 2D_3x + 2E_3y \\ B_1 - E_1 - D_1 & B_2 - E_2x - D_2y & B_3 - E_3x - D_3y \end{vmatrix} = 0.$$

Die Brennpunkte der Parabeln liegen demnach auf einem Kreise.

334. Sind $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ die Gleichungen der beiden Tangenten, $L_3 = 0$ die Gleichung der Berührungssehne, so kann man der Gleichung des Kegelschnittes die Gestalt erteilen:

$$L_1 L_2 - kL_3^2 = 0.$$

Daraus folgt: Das Rechteck aus den Abständen eines Punktes des Kegelschnittes von den beiden Tangenten steht zu dem Quadrate über dem Abstande desselben Punktes von der Berührungssehne in einem konstanten Verhältnis.

335. Sind $L_1 = 0$, $L'_1 = 0$, $L_2 = 0$, $L'_2 = 0$ die Seiten des Sehnenvierecks, so entspricht der Kegelschnitt einer Gleichung von der Form

$$L_1 L_2 - k L'_1 L'_2 = 0.$$

Daraus ersieht man, daß die Rechtecke, von denen jedes aus den Loten, welche auf zwei Gegenseiten stehen, gebildet ist, in einem konstanten Verhältnis stehen.

336. Der Kegelschnitt läßt sich als der Träger einer Punktreihe zweiter Ordnung ansehen. Sind demnach $a_0 u + b_0 v + 1 = 0$, $a_2 u + b_2 v + 1 = 0$ die Gleichungen der Berührungspunkte, $a_1 u + b_1 v + 1 = 0$ die Gleichung des Schnittpunktes der Tangenten, so entspricht der Kegelschnitt einer Gleichung von der Form

$$(a_0 u + b_0 v + 1)(a_2 u + b_2 v + 1) - k(a_1 u + b_1 v + 1)^2 = 0.$$

Sind nun u_1, v_1 die Koordinaten einer Tangente des Kegelschnittes, so ist auch

$$\frac{a_0 u_1 + b_0 v_1 + 1}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2}} \cdot \frac{a_2 u_1 + b_2 v_1 + 1}{\sqrt{u_1^2 + v_1^2}} - \frac{k(a_1 u_1 + b_1 v_1 + 1)^2}{u_1^2 + v_1^2} = 0,$$

d. h. fällt man von zwei beliebigen Punkten eines Kegelschnittes, sowie von dem Schnittpunkte der Tangenten, deren Berührungspunkte jene beiden Punkte sind, Lote auf eine feste Tangente des Kegelschnittes, so steht das Rechteck aus den beiden ersten Loten zu dem Quadrat über dem letzten in einem konstanten Verhältnis.

337. Der geometrische Ort des Punktes P ist ein Kegelschnitt; die Gleichung desselben lautet:

$$42y^2 - 237xy - 25x^2 + 219y + 254x + 279 = 0.$$

338. Man erhält durch Elimination der beiden variabeln Parameter f und k die Relation

$$L_1 L'_2(aA_1 - bA_2) - L'_1 L_2(cA_1 - dA_2) = 0.$$

Das Erzeugnis der beiden Strahlenbüschel ist demnach eine Kurve dritter Ordnung.

339. Die Gleichung des Erzeugnisses des Büschels erster Ordnung und des Kegelschnittbüschels ist

$$10x^3 - 30x^2y + 23xy^2 - 6y^3 + 36x^2 - 23xy + y^2 - 22x + 43y - 48 = 0$$

Der Kegelschnitt, welcher durch den Mittelpunkt des Büschels erster Ordnung geht, entspricht der Gleichung

$$11x^2 + 3xy - 5y^2 - 8x + 16y - 15 = 0.$$

Der diesem Kegelschnitte entsprechende Strahl

$$2x - y + 1 = 0$$

berührt die Kurve dritter Ordnung in dem Mittelpunkte des Büschels.

340. Der Strahl des Büschels, welcher durch den gegebenen Fundamentalpunkt des Kegelschnittbüschels geht, entspricht der Gleichung

$$4y - 7x - 5 = 0,$$

dagegen ist die Gleichung des diesem Strahle entsprechenden Kegelschnittes

$$19x^2 + 3xy - 7y^2 - 12x + 26y - 27 = 0.$$

Dieser Kegelschnitt berührt die Kurve dritter Ordnung in dem gegebenen Fundamentalpunkte des Kegelschnittbüschels.

Trimetrische Koordinaten.

341. Nach der Aufgabe soll

$$a_{11}(x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1)^2 + 2a_{12}(x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1)(x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 - p_2)$$
$$+ a_{22}(x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 - p_2)^2 + 2a_{13}(x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1)(x\cos\alpha_3 + y\sin\alpha_3 - p_3)$$
$$+ 2a_{23}(x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 - p_2)(x\cos\alpha_3 + y\sin\alpha_3 - p_3) + a_{33}(x\cos\alpha_3 + y\sin\alpha_3 - p_3)^2$$
$$= Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

sein; demnach ergeben sich zur Bestimmung der Konstanten a_{11}, $a_{12}\ldots$ die Relationen:

$$a_{11}\cos^2\alpha_1 + 2a_{12}\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + a_{22}\cos^2\alpha_2 + 2a_{13}\cos\alpha_1\cos\alpha_3$$
$$+ 2a_{23}\cos\alpha_2\cos\alpha_3 + a_{33}\cos^2\alpha_3 = A,$$

$$a_{11}\sin\alpha_1\cos\alpha_1 + a_{12}\sin(\alpha_1 + \alpha_2) + a_{22}\sin\alpha_2\cos\alpha_2 + a_{13}\sin(\alpha_1 + \alpha_3)$$
$$+ a_{23}\sin(\alpha_2 + \alpha_3) + a_{33}\sin\alpha_3\cos\alpha_3 = B,$$

$$a_{11}\sin^2\alpha_1 + 2a_{12}\sin\alpha_1\sin\alpha_2 + a_{22}\sin^2\alpha_2 + 2a_{13}\sin\alpha_1\sin\alpha_3$$
$$+ 2a_{23}\sin\alpha_2\sin\alpha_3 + a_{33}\sin^2\alpha_3 = C,$$

$$a_{11}p_1\cos\alpha_1 + a_{12}(p_1\cos\alpha_2 + p_2\cos\alpha_1) + a_{22}p_2\cos\alpha_2 + a_{13}(p_1\cos\alpha_3 + p_3\cos\alpha_1)$$
$$+ a_{23}(p_2\cos\alpha_3 + p_3\cos\alpha_2) + a_{33}p_3\cos\alpha_3 = -D,$$

$$a_{11}p_1\sin\alpha_1 + a_{12}(p_1\sin\alpha_2 + p_2\sin\alpha_1) + a_{22}p_2\sin\alpha_2 + a_{13}(p_1\sin\alpha_3 + p_3\sin\alpha_1)$$
$$+ a_{23}(p_2\sin\alpha_3 + p_3\sin\alpha_2) + a_{33}p_3\sin\alpha_3 = -E,$$

$$a_{11}p_1^2 + 2a_{12}p_1p_2 + a_{22}p_2^2 + 2a_{13}p_1p_3 + 2a_{23}p_2p_3 + a_{33}p_3^2 = F.$$

342. Nehmen wir an, die gesuchte Relation lasse sich in der Form

$$k_{11}u_1^2 + 2k_{12}u_1u_2 + k_{22}u_2^2 + 2k_{13}u_1u_3 + 2k_{23}u_2u_3 + k_{33}u_3^2 = 0$$

darstellen, worin

$$u_1 = \frac{U_1}{\sqrt{u^2+v^2}},\quad u_2 = \frac{U_2}{\sqrt{u^2+v^2}},\quad u_3 = \frac{U_3}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

ist, dann können wir auf Grund einer Folgerung, welche ähnlich ist der in der vorhergehenden Lösung, zur Bestimmung der unbekannten Konstanten folgende Gleichungen aufstellen:

$$k_{11}a_1^2 + 2k_{12}a_1a_2 + k_{22}a_2^2 + 2k_{13}a_1a_3 + 2k_{23}a_2a_3 + k_{33}a_3^2 = A,$$

$$k_{11}a_1b_1 + k_{12}(a_1b_2 + a_2b_1) + k_{22}a_2b_2 + k_{13}(a_3b_1 + a_1b_3) + k_{23}(a_3b_2 + a_2b_3) + k_{33}a_3b_3 = B,$$

$$k_{11}b_1^2 + 2k_{12}b_1b_2 + k_{22}b_2^2 + 2k_{13}b_1b_3 + 2k_{23}b_2b_3 + k_{33}b_3^2 = C,$$

$$k_{11}a_1 + k_{12}(a_1 + a_2) + k_{22}a_2 + k_{13}(a_1 + a_3) + k_{23}(a_2 + a_3) + k_{33}a_3 = D,$$

$$k_{11}b_1 + k_{12}(b_1 + b_2) + k_{22}b_2 + k_{13}(b_1 + b_3) + k_{23}(b_2 + b_3) + k_{33}b_3 = E,$$

$$k_{11} + 2k_{12} + k_{22} + 2k_{13} + 2k_{23} + k_{33} = F.$$

343. Da die Gleichung

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0$$

bei Einsetzung der Werte

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0;\quad x_1 = 0,\ x_3 = 0;\quad x_2 = 0,\ x_3 = 0$$

zu einer identischen werden muß, so ergeben sich für den angegebenen Fall die Relationen:

$$a_{11} = 0,\quad a_{22} = 0,\quad a_{33} = 0.$$

Die Gleichung des Kegelschnittes nimmt demnach die Gestalt an

$$a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3 = 0.$$

344. Es liege in dem Fundamentaldreieck der Winkel α_1 der Seite $x_1 = 0$, der Winkel α_2 der Seite $x_2 = 0$ und der Winkel α_3 der Seite $x_3 = 0$ gegenüber. Bei Einführung dieser Winkel findet man, daß die Gleichung des dem Fundamentaldreieck umschriebenen Kreises

$$x_1x_2\sin\alpha_3 + x_2x_3\sin\alpha_1 + x_3x_1\sin\alpha_2 = 0$$

ist. Aus dieser Gleichung ersieht man sofort, daß die Fußpunkte der Lote, welche von einem beliebigen Punkte des Kreises auf die Seiten des Fundamentaldreiecks gefällt sind, in einer geraden Linie liegen.

345. Da in diesem Falle die Konstanten k_{11}, k_{22}, k_{33} verschwinden müssen, so ergiebt sich:

$$k_{12}u_1u_2 + k_{13}u_1u_3 + k_{23}u_2u_3 = 0$$

oder

$$\frac{k_{12}}{u_3} + \frac{k_{23}}{u_1} + \frac{k_{31}}{u_2} = 0.$$

346. Die Gleichung ist

$$u_1u_2 \cot\frac{\alpha_3}{2} + u_2u_3 \cot\frac{\alpha_1}{2} + u_3u_1 \cot\frac{\alpha_2}{2} = 0,$$

vorausgesetzt daß $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$ die Scheitel der Winkel α_1, α_2, α_3 sind.

347. Die Gleichungen der Strahlenpaare sind:

$$a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{33}x_3^2 = 0,$$
$$a_{11}x_1^2 + 2a_{13}x_1x_3 + a_{33}x_3^2 = 0,$$
$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 = 0.$$

348. Die drei Punktpaare entsprechen den Gleichungen:

$$k_{22}u_2^2 + 2k_{23}u_2u_3 + k_{33}u_3^2 = 0,$$
$$k_{11}u_1^2 + 2k_{13}u_1u_3 + k_{33}u_3^2 = 0,$$
$$k_{11}u_1^2 + 2k_{12}u_1u_2 + k_{22}u_2^2 = 0.$$

349. Da die Gleichung des dem Dreieck umschriebenen Kegelschnittes die Gestalt

$$a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3 = 0$$

besitzt, so sind die Gleichungen der Tangenten:

$$a_{13}x_1 + a_{23}x_2 = 0, \quad a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0, \quad a_{12}x_1 + a_{23}x_3 = 0.$$

Aus der Form derselben ersieht man, daß die Schnittpunkte der Tangenten mit den Gegenseiten auf einer Geraden liegen, welche der Gleichung

$$\frac{x_1}{a_{23}} + \frac{x_2}{a_{13}} + \frac{x_3}{a_{12}} = 0$$

entspricht.

350. Die Gleichung des Kegelschnittes sei

$$k_{12}u_1u_2 + k_{23}u_2u_3 + k_{31}u_3u_1 = 0,$$

wenn

$$u_1 = \frac{U_1}{\sqrt{u^2+v^2}}, \quad u_2 = \frac{U_2}{\sqrt{u^2+v^2}}, \quad u_3 = \frac{U_3}{\sqrt{u^2+v^2}}$$

ist, dann sind die Gleichungen der Berührungspunkte:

$$\frac{u_1}{k_{23}} + \frac{u_2}{k_{31}} = 0, \quad \frac{u_2}{k_{31}} + \frac{u_3}{k_{12}} = 0, \quad \frac{u_3}{k_{12}} + \frac{u_1}{k_{23}} = 0.$$

Die drei Ecktransversalen schneiden sich in dem Punkte

$$\frac{u_1}{k_{23}} + \frac{u_2}{k_{31}} + \frac{u_3}{k_{12}} = 0.$$

351. Die drei ersten Punkte mögen als Eckpunkte des Fundamentaldreiecks betrachtet werden, die Koordinaten des vierten und fünften Punktes bezüglich dieses Dreiecks seien x'_1, x'_2, x'_3; x''_1, x''_2, x''_3, dann ist die Gleichung des Kegelschnittes

$$x'_3 x''_3 \begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 \\ x''_1 & x''_2 \end{vmatrix} x_1 x_2 + x'_2 x''_2 \begin{vmatrix} x'_3 & x'_1 \\ x''_3 & x''_1 \end{vmatrix} x_3 x_1 + x'_1 x''_1 \begin{vmatrix} x'_2 & x'_3 \\ x''_2 & x''_3 \end{vmatrix} x_2 x_3 = 0.$$

352. Es seien die Schnittpunkte der drei ersten Geraden die Eckpunkte des Fundamentaldreiecks, die Koordinaten der vierten und fünften bezüglich dieses Dreiecks u'_1, u'_2, u'_3; u''_1, u''_2, u''_3, dann ist die Gleichung des Kegelschnittes in homogenen Linienkoordinaten

$$u'_3 u''_3 \begin{vmatrix} u'_1 & u'_2 \\ u''_1 & u''_2 \end{vmatrix} u_1 u_2 + u'_2 u''_2 \begin{vmatrix} u'_3 & u'_1 \\ u''_3 & u''_1 \end{vmatrix} u_3 u_1 + u'_1 u''_1 \begin{vmatrix} u'_2 & u'_3 \\ u''_2 & u''_3 \end{vmatrix} u_2 u_3 = 0.$$

353. Die Lage des zweiten Schnittpunktes ist bestimmt durch die Relationen

$$\frac{x_1}{x_3} = -\frac{\alpha a_{23} - \beta a_{13}}{\alpha a_{12}}, \quad \frac{x_2}{x_3} = \frac{\alpha a_{23} - \beta a_{13}}{\beta a_{12}}.$$

354. Die Koordinaten der zweiten Tangente genügen den Proportionen

$$u_1 : u_3 = -pk_{23} + qk_{13} : pk_{12},$$
$$u_2 : u_3 = pk_{23} - qk_{13} : qk_{12}.$$

355. Der Gleichung entspricht:

1. a) eine Hyperbel,
   b) zwei sich schneidende Gerade,
   c) eine Hyperbel;
2. a) eine Parabel,
   b) zwei parallele Gerade; dieselben sind reell und liegen getrennt oder fallen zusammen, wenn $a_{11}a_{33} - a_{13}^2 < 0$, sie sind dagegen imaginär, wenn $a_{11}a_{33} - a_{13}^2 > 0$ ist,
   c) eine Parabel;
3. a) eine reelle Ellipse,
   b) zwei imaginäre Gerade, die sich in einem reellen Punkte schneiden,
   c) eine imaginäre Ellipse.

356. Die Kurven, welche den gegebenen Gleichungen entsprechen, sind:

a) eine reelle Ellipse,

b) zwei sich schneidende Gerade, deren Gleichungen

$$3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0, \quad 7x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0$$

sind,

c) eine Hyperbel,

d) zwei Gerade, welche zusammenfallen,

e) eine Parabel.

357. Die Bedingungsgleichung lautet:

$$l_1^2 : l_2^2 : l_3^2 = a_{22} + a_{33} - 2a_{23} : a_{11} + a_{33} - 2a_{13} : a_{11} + a_{22} - 2a_{12}.$$

(l_1, l_2, l_3 sind die Längen der Seiten des Fundamentaldreiecks.)

358. $a_1^2 x_1^2 - 2a_1a_2x_1x_2 + a_2^2x_2^2 - 2a_1a_3x_1x_3 - 2a_2a_3x_2x_3 + a_3^2x_3^2 = 0.$

359. Sind α, β, γ die Winkel des Fundamentaldreiecks, so ist die Gleichung des einbeschriebenen Kreises:

$$\sqrt{x_1}\cos\frac{\alpha}{2} + \sqrt{x_2}\cos\frac{\beta}{2} + \sqrt{x_3}\cos\frac{\gamma}{2} = 0;$$

dagegen sind die Gleichungen der anbeschriebenen Kreise:

$$\sqrt{x_1}\cos\frac{\alpha}{2} + \sqrt{x_2}\sin\frac{\beta}{2} + \sqrt{x_3}\sin\frac{\gamma}{2} = 0,$$

$$\sqrt{x_1}\sin\frac{\alpha}{2} + \sqrt{x_2}\cos\frac{\beta}{2} + \sqrt{x_3}\sin\frac{\gamma}{2} = 0,$$

$$\sqrt{x_1}\sin\frac{\alpha}{2} + \sqrt{x_2}\sin\frac{\beta}{2} + \sqrt{x_3}\cos\frac{\gamma}{2} = 0.$$

360. $$a_{11} : a_{22} : a_{33} = \sin^2 A : \sin^2 B : \sin^2 C,$$

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0, \quad a_{11}a_{33} - a_{13}^2 = 0,$$

$$a_{13}a_{23} - a_{12}a_{33} = 0.$$

361. Es sei

$$\Sigma = k_{11} + 2k_{12} + k_{22} + 2k_{13} + 2k_{23} + k_{33},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{vmatrix},$$

dann entspricht der gegebenen Gleichung in homogenen Linienkoordinaten:

a) für $\Sigma \gtrless 0$, $\Delta \gtrless 0$ eine Ellipse,

b) für $\Sigma \gtrless 0$, $\Delta \lessgtr 0$ eine Hyperbel,

c) für $\Sigma = 0$ eine Parabel,

d) für $\Delta = 0$ ein Punktpaar.

362. Die Kurven, welche den gegebenen Gleichungen entsprechen, sind:

a) eine Parabel,

b) zwei Punkte: $3u_1 + 4u_2 + u_3 = 0$, $7u_1 - 4u_2 + u_3 = 0$,

c) eine Hyperbel,

d) eine Ellipse.

363. $k_1^2 u_1^2 + k_2^2 u_2^2 + k_3^2 u_3^2 - 2k_1 k_2 u_1 u_2 - 2k_2 k_3 u_2 u_3 - 2k_3 k_1 u_3 u_1 = 0$ oder

$$\sqrt{k_1 u_1} + \sqrt{k_2 u_2} + \sqrt{k_3 u_3} = 0.$$

364. Die Gleichung des Kreises ist

$$u_1^2 \sin^4\alpha + u_2^2 \sin^4\beta + u_3^2 \sin^4\gamma - 2u_1 u_2 \sin^2\alpha \sin^2\beta$$
$$- 2u_2 u_3 \sin^2\beta \sin^2\gamma - 2u_3 u_1 \sin^2\gamma \sin^2\alpha = 0$$

oder

$$\sqrt{u_1} \sin\alpha + \sqrt{u_2} \sin\beta + \sqrt{u_3} \sin\gamma = 0,$$

wenn α, β, γ die Winkel des Fundamentaldreiecks sind. Die Gleichung des Mittelpunktes ist

$$u_1 \sin 2\alpha + u_2 \sin 2\beta + u_3 \sin 2\gamma = 0.$$

365. Die Gleichung der eingeschriebenen Parabel ist

$$f u_1 u_2 + k u_2 u_3 - (f + k) u_3 u_1 = 0.$$

366. Das zu bestimmende Gebilde gehört der zweiten Klasse an. Da nun

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{h_1^2} & -\frac{\cos\gamma}{h_1 h_2} & -\frac{\cos\beta}{h_3 h_1} \\ -\frac{\cos\gamma}{h_1 h_2} & \frac{1}{h_2^2} & -\frac{\cos\alpha}{h_2 h_3} \\ -\frac{\cos\beta}{h_3 h_1} & -\frac{\cos\alpha}{h_2 h_3} & \frac{1}{h_3^2} \end{vmatrix} = 0$$

ist, ferner aber die gegebene Gleichung bei Einsetzung der Koordinaten einer endlichen Geraden nicht identisch wird, so besteht das Gebilde aus zwei Punkten, welche auf der unendlich fernen Geraden liegen. Dieselben sind imaginär und werden die imaginären Kreispunkte genannt, weil sie die auf der unendlich fernen Geraden liegenden imaginären Punkte eines beliebigen endlichen Kreises sind.

367. a) die Wurzeln sind die Koordinaten der Punkte, in welchen die Gerade $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ den Kegelschnitt schneidet; b) die Wurzeln sind die Koordinaten der beiden

Tangenten, welche sich von dem Punkte $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ an den Kegelschnitt legen lassen.

368. Die Konstanten der beiden Gleichungen müssen der Relation

$$a_{12}^2 a_3^2 + a_{31}^2 a_2^2 + a_{23}^2 a_1^2 - 2 a_{12} a_{13} a_2 a_3 - 2 a_{21} a_{23} a_1 a_3 - 2 a_{31} a_{32} a_1 a_2 = 0$$

genügen.

369. Die Bedingungsgleichung lautet:

$$k_1^2 k_{23}^2 + k_2^2 k_{13}^2 + k_3^2 k_{12}^2 - 2 k_1 k_2 k_{13} k_{23} - 2 k_1 k_3 k_{12} k_{32} - 2 k_2 k_3 k_{21} k_{31} = 0.$$

370. Die Gleichung der Tangente läßt sich auf die Form bringen:

$$(a_{11} x'_1 + a_{12} x'_2 + a_{13} x'_3) x_1 + (a_{21} x'_1 + a_{22} x'_2 + a_{23} x'_3) x_2 + (a_{31} x'_1 + a_{32} x'_2 + a_{33} x'_3) x_3 = 0.$$

371. Der Berührungspunkt entspricht der Gleichung

$$(k_{11} u'_1 + k_{12} u'_2 + k_{13} u'_3) u_1 + (k_{21} u'_1 + k_{22} u'_2 + k_{23} u'_3) u_2 + (k_{31} u'_1 + k_{32} u'_2 + k_{33} u'_3) u_3 = 0.$$

372. a) Es seien $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ die Gleichungen der Seiten des Fundamentalvierecks, dann ist die Gleichung des Kegelschnittbüschels

$$x_1 x_3 + f x_2 (a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3) = 0,$$

in der f jeder beliebige reelle Wert erteilt werden kann.

b) Es seien die Gleichungen der vier Eckpunkte des Fundamentalvierecks

$$u_1 = 0,\ u_2 = 0,\ u_3 = 0,\ b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3 = 0,$$

dann ist die Gleichung des Kegelschnittbüschels

$$\sqrt{k_1 u_1} + \sqrt{k_2 u_2} + \sqrt{k_3 u_3} = 0,$$

vorausgesetzt daß die Größen k_1, k_2, k_3 der Relation

$$\frac{k_1}{b_1} + \frac{k_2}{b_2} + \frac{k_3}{b_3} = 0$$

genügen.

373. a) Sind $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = 0$ die Gleichungen der Seiten des Vierseits, so entspricht die Kegelschnittschar der Gleichung

$$\sqrt{a_1 x_1} + \sqrt{a_2 x_2} + \sqrt{a_3 x_3} = 0,$$

deren Konstanten der Bedingungsgleichung

$$\frac{a_1}{c_1} + \frac{a_2}{c_2} + \frac{a_3}{c_3} = 0$$

genügen müssen.

b) Wenn dagegen die Gleichungen der vier Fundamentalpunkte der Schar

$$u_1 = 0, \quad u_2 = 0, \quad u_3 = 0, \quad k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3 = 0$$

gegeben sind, so erhält die Gleichung der Kegelschnittschar selbst die Gestalt

$$u_1 u_3 + f u_2 (k_1 u_1 + k_2 u_2 + k_3 u_3) = 0;$$

f ist der variable Parameter.

374. Die Gleichung eines Kegelschnittes, der durch die drei Eckpunkte des Fundamentaldreiecks geht, ist

$$a_{12} x_1 x_2 + a_{23} x_2 x_3 + a_{31} x_3 x_1 = 0.$$

Soll die Kurve von den beiden gegebenen Geraden berührt werden, so müssen die Konstanten den Relationen

$$\sqrt{a_{12} a_3} + \sqrt{a_{23} a_1} + \sqrt{a_{31} a_2} = 0,$$
$$\sqrt{a_{12} b_3} + \sqrt{a_{23} b_1} + \sqrt{a_{31} b_2} = 0$$

genügen. Da sich aus diesen Gleichungen für die Quotienten $\frac{a_{12}}{a_{31}}, \frac{a_{23}}{a_{31}}$ vier Wertepaare entwickeln lassen, so können vier Kegelschnitte bestimmt werden, welche den Anforderungen der Aufgabe entsprechen.

375. Zur Bestimmung der Konstanten in der Gleichung

$$k_{12} u_1 u_2 + k_{23} u_2 u_3 + k_{31} u_3 u_1 = 0$$

kann man die Relationen

$$\sqrt{k_{12} k_3} + \sqrt{k_{23} k_1} + \sqrt{k_{31} k_2} = 0,$$
$$\sqrt{k_{12} h_3} + \sqrt{k_{23} h_1} + \sqrt{k_{31} h_2} = 0$$

benutzen. Es lassen sich demnach vier Kegelschnitte konstruieren, welche durch zwei Punkte gehen und von drei gegebenen Geraden berührt werden.

376. Die Koordinaten des vierten Schnittpunktes sind bestimmt durch die Gleichungen

$$x_1 : x_2 = \begin{vmatrix} c & a \\ g & d \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a & b \\ d & f \end{vmatrix}, \quad x_1 : x_3 = \begin{vmatrix} b & c \\ f & g \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a & b \\ d & f \end{vmatrix},$$

wenn

$$a = x'_3 x''_3 \begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 \\ x''_1 & x''_2 \end{vmatrix}, \quad b = x'_2 x''_2 \begin{vmatrix} x'_3 & x'_1 \\ x''_3 & x''_1 \end{vmatrix}, \quad c = x'_1 x''_1 \begin{vmatrix} x'_2 & x'_3 \\ x''_2 & x''_3 \end{vmatrix},$$

$$d = x^{III}_3 x^{IV}_3 \begin{vmatrix} x^{III}_1 & x^{III}_2 \\ x^{IV}_1 & x^{IV}_2 \end{vmatrix}, \quad f = x^{III}_2 x^{IV}_2 \begin{vmatrix} x^{III}_3 & x^{III}_1 \\ x^{IV}_3 & x^{IV}_1 \end{vmatrix}, \quad g = x^{III}_1 x^{IV}_1 \begin{vmatrix} x^{III}_2 & x^{III}_3 \\ x^{IV}_2 & x^{IV}_3 \end{vmatrix}$$

ist.

377. Das Resultat ist dem in der vorhergehenden Lösung gewonnenen gleichartig, wenn man x'_1, x'_2 u. s. f. als Linienkoordinaten betrachtet.

378. Sind u_1, u_2, u_3 die Abstände der Ecken des Fundamentaldreiecks von einer Geraden, welche den Kegelschnitt im Punkte x_1, x_2, x_3 berührt, ferner h_1, h_2, h_3 die Höhen des Fundamentaldreiecks, so lassen sich folgende Relationen aufstellen:

$$2a_{11}x_1 + 2a_{12}x_2 + 2a_{13}x_3 - M\frac{u_1}{h_1} = 0,$$

$$2a_{21}x_1 + 2a_{22}x_2 + 2a_{23}x_3 - M\frac{u_2}{h_2} = 0,$$

$$2a_{31}x_1 + 2a_{32}x_2 + 2a_{33}x_3 - M\frac{u_3}{h_3} = 0,$$

$$\frac{u_1}{h_1}x_1 + \frac{u_2}{h_2}x_2 + \frac{u_3}{h_3}x_3 = 0,$$

in denen M eine unbestimmte Konstante ist. Aus diesen ergiebt sich durch Elimination der Größen x_1, x_2, x_3 die Gleichung des Kegelschnittes in homogenen Linienkoordinaten:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \frac{u_1}{h_1} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \frac{u_2}{h_2} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \frac{u_3}{h_3} \\ \frac{u_1}{h_1} & \frac{u_2}{h_2} & \frac{u_3}{h_3} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

379. Die Transformationsgleichungen sind:

$$2k_{11}u_1 + 2k_{12}u_2 + 2k_{13}u_3 - N\frac{x_1}{h_1} = 0,$$

$$2k_{21}u_1 + 2k_{22}u_2 + 2k_{23}u_3 - N\frac{x_2}{h_2} = 0,$$

$$2k_{31}u_1 + 2k_{32}u_2 + 2k_{33}u_3 - N\frac{x_3}{h_3} = 0,$$

$$\frac{x_1}{h_1}u_1 + \frac{x_2}{h_2}u_2 + \frac{x_3}{h_3}u_3 = 0;$$

demnach läßt sich das gesuchte Resultat durch die Form

$$\begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \frac{x_1}{h_1} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \frac{x_2}{h_2} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & \frac{x_3}{h_3} \\ \frac{x_1}{h_1} & \frac{x_2}{h_2} & \frac{x_3}{h_3} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

ausdrücken.

380. $(a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + a_{13}x'_3)x_1 + (a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + a_{23}x'_3)x_2 + (a_{31}x'_1 + a_{32}x'_2 + a_{33}x'_3)x_3 = 0.$

381. Der Punkt, welcher der Gleichung entspricht, ist der Pol einer Geraden (bezüglich des Kegelschnittes), deren homogene Linienkoordinaten u'_1, u'_2, u'_3 sind.

382. Die Koordinaten der Ecken des Dreiecks sind bestimmt durch die Relationen:

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = \begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix},$$

$$x''_1 : x''_2 : x''_3 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$x'''_1 : x'''_2 : x'''_3 = \begin{vmatrix} a_{32} & a_{33} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{23} & a_{21} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

383. $\{(a_2a_{13} - a_3a_{12})x_1 + (a_2a_{23} - a_3a_{22})x_2 + (a_2a_{33} - a_3a_{23})x_3\}$ $+ f\{(a_2a_{11} - a_1a_{12})x_1 + (a_2a_{12} - a_1a_{22})x_2 + (a_2a_{13} - a_1a_{23})x_3\} = 0,$ worin f der variable Parameter ist.

384. Da die Polaren aller Punkte des Durchmessers einander parallel laufen, so müssen die Konstanten den Relationen

$$a_1a_{12} + a_2(a_{13} - a_{11}) - a_3a_{12} - k\sin A = 0,$$
$$a_1a_{22} + a_2(a_{23} - a_{21}) - a_3a_{22} - k\sin B = 0,$$
$$a_1a_{32} + a_2(a_{33} - a_{31}) - a_3a_{32} - k\sin C = 0$$

genügen, vorausgesetzt daß k eine beliebige Konstante und A, B, C die Winkel des Fundamentaldreiecks sind.

385. Zur Bestimmung der Koordinaten des Poles erhält man die Relationen

$$a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + a_{13}x'_3 - fa_1 = 0,$$
$$a_{21}x'_1 + a_{22}x'_2 + a_{23}x'_3 - fa_2 = 0,$$
$$a_{31}x'_1 + a_{32}x'_2 + a_{33}x'_3 - fa_3 = 0.$$

Betrachtet man x'_1, x'_2, x'_3 als Linienkoordinaten, so erhält man die Koordinaten einer Geraden, welche die Polare des Punktes $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$ bezüglich des Kegelschnittes ist.

386. Man erhält:

$$u'_1 : u'_2 : u'_3 = k_{23} : -k_{31} : k_{12},$$
$$u''_1 : u''_2 : u''_3 = k_{23} : k_{31} : -k_{12},$$
$$u'''_1 : u'''_2 : u'''_3 = -k_{23} : k_{31} : k_{12}.$$

387. Bezeichnet man die Winkel des Fundamentaldreiecks mit A, B, C, die Längen der Seiten mit l_1, l_2, l_3, so ergiebt sich:

$$x'_1 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \sin A \\ 0 & 0 & a_{23} & \sin B \\ 0 & a_{32} & 0 & \sin C \\ 2J & l_2 & l_3 & 0 \end{vmatrix}, \quad x'_2 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & 0 & a_{13} & \sin A \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \sin B \\ a_{31} & 0 & 0 & \sin C \\ l_1 & 2J & l_3 & 0 \end{vmatrix},$$

$$x'_3 = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & \sin A \\ a_{21} & 0 & 0 & \sin B \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \sin C \\ l_1 & l_2 & 2J & 0 \end{vmatrix},$$

wenn

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \sin A \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \sin B \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \sin C \\ l_1 & l_2 & l_3 & 0 \end{vmatrix}$$

ist.

388. Man konstruiert zunächst zu einem Punkte P_1 bezüglich des Kegelschnittes die Polare p_1, welche in der Endlichkeit liegen möge, und wählt auf p_1 einen Punkt P_2, dessen Polare p_2 der Geraden p_1 nicht parallel läuft, sondern dieselbe in einem endlichen Punkte P_3 schneidet, dann ist p_3 die Verbindungslinie der Punkte P_1 und P_2 die Polare des Punktes P_3. p_1, p_2, p_3 sind die Seiten eines sich selbst konjugierten Dreiecks.

389. Da jede Seite des Fundamentaldreiecks Polare zu der gegenüberliegenden Ecke sein soll, so ergiebt sich:

a) $a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 = 0$,

b) $k_1 u_1^2 + k_2 u_2^2 + k_3 u_3^2 = 0$.

390. Sind l_1, l_2, l_3 die Längen der Seiten des Fundamentaldreiecks, so ergiebt sich:

$$\text{a)} \quad \frac{l_1^2}{a_1} u_1^2 + \frac{l_2^2}{a_2} u_2^2 + \frac{l_3^2}{a_3} u_3^2 = 0;$$

$$\text{b)} \quad \frac{l_1^2}{k_1} x_1^2 + \frac{l_2^2}{k_2} x_2^2 + \frac{l_3^2}{k_3} x_3^2 = 0.$$

391. Sind $x'_1, x'_2, x'_3; x''_1, x''_2, x''_3; x'''_1, x'''_2, x'''_3$ die Punktkoordinaten der Ecken des zweiten Dreiecks, so lautet die Bedingungsgleichung:

$$\begin{vmatrix} x'_1 x''_1 & x'_2 x''_2 & x'_3 x''_3 \\ x''_1 x'''_1 & x''_2 x'''_2 & x''_3 x'''_3 \\ x'''_1 x'_1 & x'''_2 x'_2 & x'''_3 x'_3 \end{vmatrix} = 0;$$

entsprechend müssen die Linienkoordinaten der Seiten $u'_1, u'_2, u'_3; u''_1, u''_2, u''_3; u'''_1, u'''_2, u'''_3$ der Relation

$$\begin{vmatrix} u'_1 u''_1 & u'_2 u''_2 & u'_3 u''_3 \\ u''_1 u'''_1 & u''_2 u'''_2 & u''_3 u'''_3 \\ u'''_1 u'_1 & u'''_2 u'_2 & u'''_3 u'_3 \end{vmatrix} = 0$$

genügen.

392. Die drei Paare von gegenüberliegenden Seiten des Vierecks, welches zu dem Büschel gehört, entsprechen den Gleichungen:

$$\frac{x_1}{a_1} - \frac{x_2}{a_2} = 0, \quad \frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} = 0; \quad \frac{x_2}{a_2} - \frac{x_3}{a_3} = 0, \quad \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} = 0;$$

$$\frac{x_3}{a_3} - \frac{x_1}{a_1} = 0, \quad \frac{x_3}{a_3} + \frac{x_1}{a_1} = 0;$$

demnach ist die Gleichung des Kegelschnittbüschels

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} + f\left(\frac{x_3^2}{a_3^2} - \frac{x_1^2}{a_1^2}\right) = 0,$$

oder

$$(1 - f)\frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2} + f\frac{x_3^2}{a_3^2} = 0.$$

393. Sind $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ die Gleichungen der Ecken des Fundamentaldreiecks, so entsprechen die Ecken des der Schar umschriebenen Tangentenvierseits den Gleichungen:

$$\frac{u_1}{k_1} + \frac{u_2}{k_2} = 0, \quad \frac{u_1}{k_1} - \frac{u_2}{k_2} = 0; \quad \frac{u_2}{k_2} + \frac{u_3}{k_3} = 0, \quad \frac{u_2}{k_2} - \frac{u_3}{k_3} = 0;$$

$$\frac{u_3}{k_3} + \frac{u_1}{k_1} = 0, \quad \frac{u_3}{k_3} - \frac{u_1}{k_1} = 0;$$

demnach ergiebt sich als Gleichung der Schar:

$$(1 - k)\frac{u_1^2}{k_1^2} - \frac{u_2^2}{k_2^2} + k\frac{u_3^2}{k_3^2} = 0.$$

394. Man findet

$$a_1 x'_1 : a_2 x'_2 : a_3 x'_3 = b_1 : b_2 : b_3,$$

vorausgesetzt, daß die Konstanten der Bedingungsgleichung

$$\frac{b_1^2}{a_1} + \frac{b_2^2}{a_2} + \frac{b_3^2}{a_3} = 0$$

genügen.

395. Die Resultate erhält man mit Hilfe der Relationen

$$k_1 u'_1 : k_2 u'_2 : k_3 u'_3 = f_1 : f_2 : f_3,$$
$$\frac{f_1^2}{k_1} + \frac{f_2^2}{k_2} + \frac{f_3^2}{k_3} = 0.$$

396. Betrachten wir das eine der gegebenen Dreiecke als Fundamentaldreieck, so wird der gesuchte Kegelschnitt einer Gleichung von der Form

$$a_{12} x_1 x_2 + a_{23} x_2 x_3 + a_{31} x_3 x_1 = 0$$

entsprechen. Die Konstanten derselben müssen aber den Relationen

$$a_{12} x'_1 x'_2 + a_{23} x'_2 x'_3 + a_{31} x'_3 x'_1 = 0,$$
$$a_{12} x''_1 x''_2 + a_{23} x''_2 x''_3 + a_{31} x''_3 x''_1 = 0,$$
$$a_{12} x'''_1 x'''_2 + a_{23} x'''_2 x'''_3 + a_{31} x'''_3 x'''_1 = 0$$

genügen. Dies ist in der That der Fall, da nach der Voraussetzung

$$\begin{vmatrix} x'_1 x'_2 & x'_2 x'_3 & x'_3 x'_1 \\ x''_1 x''_2 & x''_2 x''_3 & x''_3 x''_1 \\ x'''_1 x'''_2 & x'''_2 x'''_3 & x'''_3 x'''_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x'_1 x''_1 & x'_2 x''_2 & x'_3 x''_3 \\ x''_1 x'''_1 & x''_2 x'''_2 & x''_3 x'''_3 \\ x'''_1 x'_1 & x'''_2 x'_2 & x'''_3 x'_3 \end{vmatrix} = 0$$

ist. Sonach ergiebt sich:

$$\begin{vmatrix} x'_2 x'_3 & x'_3 x'_1 \\ x''_2 x''_3 & x''_3 x''_1 \end{vmatrix} x_1 x_2 + \begin{vmatrix} x'_3 x'_1 & x'_1 x'_2 \\ x''_3 x''_1 & x''_1 x''_2 \end{vmatrix} x_2 x_3 + \begin{vmatrix} x'_1 x'_2 & x'_2 x'_3 \\ x''_1 x''_2 & x''_2 x''_3 \end{vmatrix} x_3 x_1 = 0.$$

397. Durch eine Entwicklung, welche der in der vorhergehenden Auflösung ähnlich ist, gelangt man zu dem Resultate:

$$\begin{vmatrix} u'_2 u'_3 & u'_3 u'_1 \\ u''_2 u''_3 & u''_3 u''_1 \end{vmatrix} u_1 u_2 + \begin{vmatrix} u'_3 u'_1 & u'_1 u'_2 \\ u''_3 u''_1 & u''_1 u''_2 \end{vmatrix} u_2 u_3 + \begin{vmatrix} u'_1 u'_2 & u'_2 u'_3 \\ u''_1 u''_2 & u''_2 u''_3 \end{vmatrix} u_3 u_1 = 0.$$

398. Betrachtet man das eine der gegebenen Dreiecke als Fundamentaldreieck und bezeichnet die Koordinaten der Ecken des andern mit x'_1, x'_2, x'_3; x''_1, x''_2, x''_3; x'''_1, x'''_2, x'''_3, so lassen sich zur Bestimmung der Konstanten in der Gleichung des gesuchten Kegelschnittes

$$\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2 = 0$$

die Relationen

$$\alpha_1 x'_1 x''_1 + \alpha_2 x'_2 x''_2 + \alpha_3 x'_3 x''_3 = 0,$$
$$\alpha_1 x''_1 x'''_1 + \alpha_2 x''_2 x'''_2 + \alpha_3 x''_3 x'''_3 = 0,$$
$$\alpha_1 x'''_1 x'_1 + \alpha_2 x'''_2 x'_2 + \alpha_3 x'''_3 x'_3 = 0$$

verwerten. Man erhält demnach

$$\begin{vmatrix} x'_2 x''_2 & x'_3 x''_3 \\ x''_2 x'''_2 & x''_3 x'''_3 \end{vmatrix} x_1^2 + \begin{vmatrix} x'_3 x''_3 & x'_1 x''_1 \\ x''_3 x'''_3 & x''_1 x'''_1 \end{vmatrix} x_2^2 + \begin{vmatrix} x'_1 x''_1 & x'_2 x''_2 \\ x''_1 x'''_1 & x''_2 x'''_2 \end{vmatrix} x_3^2 = 0.$$

399. Der Kegelschnitt entspricht der Gleichung

$$\begin{vmatrix} u'_2 u''_2 & u'_3 u''_3 \\ u''_2 u'''_2 & u''_3 u'''_3 \end{vmatrix} u_1^2 + \begin{vmatrix} u'_3 u''_3 & u'_1 u''_1 \\ u''_3 u'''_3 & u''_1 u'''_1 \end{vmatrix} u_2^2 + \begin{vmatrix} u'_1 u''_1 & u'_2 u''_2 \\ u''_1 u'''_1 & u''_2 u'''_2 \end{vmatrix} u_3^2 = 0.$$

400. Sind $x'_1, x'_2, x'_3;\ x''_1, x''_2, x''_3;\ x'''_1, x'''_2, x'''_3$ die Koordinaten der drei Eckpunkte A, B, C und demnach die Gleichungen der zugehörigen Polaren

$$P_1 \equiv a_1 x'_1 x_1 + a_2 x'_2 x_2 + a_3 x'_3 x_3 = 0,$$
$$P_2 \equiv a_1 x''_1 x_1 + a_2 x''_2 x_2 + a_3 x''_3 x_3 = 0,$$
$$P_3 \equiv a_1 x'''_1 x_1 + a_2 x'''_2 x_2 + a_3 x'''_3 x_3 = 0,$$

so lassen sich die Gleichungen der Verbindungslinien auf die Form bringen

$$f_2 P_2 - f_3 P_3 = 0, \quad f_3 P_3 - f_1 P_1 = 0, \quad f_1 P_1 - f_2 P_2 = 0.$$

Daraus erhellt, daß die drei Verbindungslinien durch einen Punkt gehen.

401. Betrachtet man x_1, x_2, x_3 als Linienkoordinaten, so nehmen die Relationen, welche man zur Entwicklung des Resultates aufzustellen hat, dieselbe Gestalt an, welche die Gleichungen in der vorhergehenden Lösung besitzen. Daraus folgt: Die drei Schnittpunkte liegen in einer geraden Linie.

402. Die Lage des Mittelpunktes ist bestimmt durch die Relation

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \sin A \\ a_{22} & a_{23} & \sin B \\ a_{32} & a_{33} & \sin C \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{13} & a_{11} & \sin A \\ a_{23} & a_{21} & \sin B \\ a_{33} & a_{31} & \sin C \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \sin A \\ a_{21} & a_{22} & \sin B \\ a_{31} & a_{32} & \sin C \end{vmatrix},$$

wenn A, B, C die Winkel des Fundamentaldreiecks sind.

403. Die Gleichung des Mittelpunktes ist:

$$(k_{11} + k_{12} + k_{13}) u_1 + (k_{21} + k_{22} + k_{23}) u_2 + (k_{31} + k_{32} + k_{33}) u_3 = 0.$$

404. Die Verbindungslinien zwischen den drei ersten Punkten seien die Seiten des Fundamentaldreiecks, die Koordinaten der

beiden andern Punkte x'_1, x'_2, x'_3; x''_1, x''_2, x''_3; dann ergeben sich die Resultate, wenn man in den Relationen, welche in Aufl. 402 aufgestellt sind,

$$a_{11} = 0, \quad a_{22} = 0, \quad a_{33} = 0,$$

$$a_{12} = x'_3 x''_3 \begin{vmatrix} x'_1 & x'_2 \\ x''_1 & x''_2 \end{vmatrix}, \quad a_{13} = x'_2 x''_2 \begin{vmatrix} x'_3 & x'_1 \\ x''_3 & x''_1 \end{vmatrix}, \quad a_{23} = x'_1 x''_1 \begin{vmatrix} x'_2 & x'_3 \\ x''_2 & x''_3 \end{vmatrix}$$

setzt.

405. Die Schnittpunkte der drei ersten Tangenten seien die Ecken des Fundamentaldreiecks, die Koordinaten der vierten Tangente u'_1, u'_2, u'_3, die der fünften u''_1, u''_2, u''_3, dann ergiebt sich:

$$\left\{ u'_2 u''_2 \begin{vmatrix} u'_3 & u'_1 \\ u''_3 & u''_1 \end{vmatrix} + u'_3 u''_3 \begin{vmatrix} u'_1 & u'_2 \\ u''_1 & u''_2 \end{vmatrix} \right\} u_1$$

$$+ \left\{ u'_3 u''_3 \begin{vmatrix} u'_1 & u'_2 \\ u''_1 & u''_2 \end{vmatrix} + u'_1 u''_1 \begin{vmatrix} u'_2 & u'_3 \\ u''_2 & u''_3 \end{vmatrix} \right\} u_2$$

$$+ \left\{ u'_1 u''_1 \begin{vmatrix} u'_2 & u'_3 \\ u''_2 & u''_3 \end{vmatrix} + u'_2 u''_2 \begin{vmatrix} u'_3 & u'_1 \\ u''_3 & u''_1 \end{vmatrix} \right\} u_3 = 0.$$

406. $$\begin{vmatrix} x'_3 & 0 & \sin A \\ 0 & x'_3 & \sin B \\ x'_1 & x'_2 & \sin C \end{vmatrix} x_1 x_2 + \begin{vmatrix} x'_1 & 0 & \sin B \\ 0 & x'_1 & \sin C \\ x'_2 & x'_3 & \sin A \end{vmatrix} x_2 x_3$$

$$+ \begin{vmatrix} x'_2 & 0 & \sin C \\ 0 & x'_2 & \sin A \\ x'_3 & x'_1 & \sin B \end{vmatrix} x_3 x_1 = 0.$$

407. $$(k_1 + k_2 - k_3) u_1 u_2 + (k_2 + k_3 - k_1) u_2 u_3$$
$$+ (k_3 + k_1 - k_2) u_3 u_1 = 0.$$

408. Die Mittelpunkte der Kegelschnitte liegen auf einer Kurve vierter Ordnung, deren Gleichung ist:

$$\sqrt{a_1 x_1 (- x_1 \sin A + x_2 \sin B + x_3 \sin C)}$$
$$+ \sqrt{a_2 x_2 (x_1 \sin A - x_2 \sin B + x_3 \sin C)}$$
$$+ \sqrt{a_3 x_3 (x_1 \sin A + x_2 \sin B - x_3 \sin C)} = 0.$$

409. Der geometrische Ort ist ein Kegelschnitt; die Gleichung desselben:

$$g_1 \sqrt{x'_1 x_1} + g_2 \sqrt{x'_2 x_2} + g_3 \sqrt{x'_3 x_3} = 0.$$

(g_1, g_2, g_3 sind die Längen der Seiten des Fundamentaldreiecks.)

410. Die Mittelpunkte liegen auf der geraden Linie

$$\frac{b_1^2}{\sin A} x_1 + \frac{b_2^2}{\sin B} x_2 + \frac{b_3^2}{\sin C} x_3 = 0.$$

411. Der geometrische Ort ist ein Kegelschnitt, welcher durch die Eckpunkte des Fundamentaldreiecks geht. Die Gleichung desselben ist

$$x_3'^2 x_1 x_2 \sin C + x_1'^2 x_2 x_3 \sin A + x_2'^2 x_3 x_1 \sin B = 0.$$

412. Die Gleichung des Durchmesserbüschels ist

$$a_2 x_2 \sin C - a_3 x_3 \sin B - f(a_1 x_1 \sin B - a_2 x_2 \sin A) = 0.$$

413. $(b_2 \sin C - b_3 \sin B) a_1 x_1 + (b_3 \sin A - b_1 \sin C) a_2 x_2$
$$+ (b_1 \sin B - b_2 \sin A) a_3 x_3 = 0.$$

414. $b_1 a_2 a_3 \sin A + b_2 a_3 a_1 \sin B + b_3 a_1 a_2 \sin C = 0.$

415. Die Bedingungsgleichung ist

$$f_1 f_2 (a_1 \sin^2 B + a_2 \sin^2 A) + (f_1 + f_2) a_2 \sin A \sin C$$
$$+ a_2 \sin^2 C + a_3 \sin^2 B = 0.$$

Die Durchmesser bilden demnach zwei projektivische konzentrische Strahlenbüschel, welche sich in Involution befinden.

416. Da die Asymptoten die Doppelstrahlen des Durchmesserbüschels sind, so erhält man:

$$a_1 f_1 x_1 \sin B - a_2 (\sin C + f_1 \sin A) x_2 + a_3 x_3 \sin B = 0,$$
$$a_1 f_2 x_1 \sin B - a_2 (\sin C + f_2 \sin A) x_2 + a_3 x_3 \sin B = 0,$$

wenn

$$f_{\frac{1}{2}} = \frac{-a_2 \sin A \sin C \pm \sin B \sqrt{-(a_1 a_2 \sin^2 C + a_2 a_3 \sin^2 A + a_3 a_1 \sin^2 B)}}{a_1 \sin^2 B + a_2 \sin^2 A}$$

ist.

417. Da die Achsen die Winkel der Asymptoten halbieren, so kann man die Gleichungen sehr leicht mit Hilfe der Resultate der vorhergehenden Aufgabe aufstellen.

418. Sind $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ die Gleichungen der Asymptoten, $x_3 = 0$ die Gleichung der Tangente, so ist die der Hyperbel

$$(x_1 \sin A - x_2 \sin B)^2 + 2 x_3 \sin C (x_1 \sin A + x_2 \sin B + x_3 \sin C) = 0.$$

419. Sind $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ die Gleichungen der beiden konjugierten Durchmesser, $x_3 = 0$ die Gleichung der Verbindungslinie zweier Endpunkte derselben, so läßt sich das Resultat auf die Form

$$2 x_1 x_2 \sin A \sin B + 2 x_1 x_3 \sin A \sin C + 2 x_2 x_3 \sin B \sin C + x_3^2 \sin^2 C = 0$$

bringen.

420. $$\frac{1}{\begin{vmatrix} b_3^2 & b_2^2 \\ b_3'^2 & b_2'^2 \end{vmatrix}} x_1^2 + \frac{1}{\begin{vmatrix} b_1^2 & b_3^2 \\ b_1'^2 & b_3'^2 \end{vmatrix}} x_2^2 + \frac{1}{\begin{vmatrix} b_2^2 & b_1^2 \\ b_2'^2 & b_1'^2 \end{vmatrix}} x_3^2 = 0.$$

421. Man erhält

1. für $f = 0$: $\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} = 0, \quad \frac{x_1}{a_1} - \frac{x_2}{a_2} = 0;$

2. für $f = 1$: $\frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} = 0, \quad \frac{x_2}{a_2} - \frac{x_3}{a_3} = 0;$

3. für $f = \infty$: $\frac{x_3}{a_3} + \frac{x_1}{a_1} = 0, \quad \frac{x_3}{a_3} - \frac{x_1}{a_1} = 0.$

422. Die Gleichungen der Punktpaare sind:

$$\frac{u_1}{k_1} + \frac{u_2}{k_2} = 0, \qquad \frac{u_1}{k_1} - \frac{u_2}{k_2} = 0;$$

$$\frac{u_2}{k_2} + \frac{u_3}{k_3} = 0, \qquad \frac{u_2}{k_2} - \frac{u_3}{k_3} = 0;$$

$$\frac{u_3}{k_3} + \frac{u_1}{k_1} = 0, \qquad \frac{u_3}{k_3} - \frac{u_1}{k_1} = 0.$$

423. $(k_3^2 - k_2^2)u_1^2 + (k_1^2 - k_3^2)u_2^2 + (k_2^2 - k_1^2)u_3^2 = 0.$

424. Das System von Kegelschnitten läßt sich als eine Schar betrachten. Sind $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ die Gleichungen der Berührungspunkte, $u_3 = 0$ die Gleichung des Schnittpunktes der Tangenten, und betrachtet man diese Punkte als Eckpunkte des Fundamentaldreiecks, so ist die gesuchte Gleichung

$$u_1 u_2 - u_3^2 = 0.$$

425. Man erhält zwei Kegelschnitte, welche der Aufgabe genügen; die Gleichungen derselben ergeben sich, wenn für f die Wurzeln der Gleichung

$$a_1^2 b_1^2 f - a_2^2 b_2^2 f(1 - f) + a_3^2 b_3^2 (1 - f) = 0$$

eingesetzt werden. Diese Wurzeln sind

$$f_{\frac{1}{2}} = \frac{a_3^2 b_3^2 + a_2^2 b_2^2 - a_1^2 b_1^2 \pm \sqrt{a_3^4 b_3^4 + a_2^4 b_2^4 + a_1^4 b_1^4 - 2a_3^2 b_3^2 a_2^2 b_2^2 - 2a_2^2 b_2^2 a_1^2 b_1^2 - 2a_1^2 b_1^2 a_3^2 b_3^2}}{2 a_2^2 b_2^2}.$$

426. Durch den gegebenen Punkt gehen zwei Kegelschnitte der Schar. Die zugehörigen Parameterwerte sind die Wurzeln der Gleichung

$$k_2^2 h_2^2 k^2 - (k_2^2 h_2^2 + k_3^2 h_3^2 - k_1^2 h_1^2) k + k_3^2 h_3^2 = 0.$$

427. Die Polaren entsprechen der Gleichung

$$\frac{x_1 x'_1}{a_1^2} - \frac{x_2 x'_2}{a_2^2} + f\left(\frac{x_3 x'_3}{a_3^2} - \frac{x_1 x'_1}{a_1^2}\right) = 0;$$

sie bilden demnach ein Strahlenbüschel erster Ordnung. Aus der Form der Gleichung ersieht man, daß sich der Mittelpunkt des Büschels durch Konstruktion leicht bestimmen läßt.

428. Die Polaren bilden ein Strahlenbüschel zweiter Ordnung, dessen Gleichung ist:

$$k^2\left\{\left(\frac{x_1}{c_3}+\frac{x_3}{c_1}\right)\left(\frac{x'_1}{c_3}+\frac{x'_3}{c_1}\right)\right\}+k\left\{\frac{x_1}{c_3}\left(\frac{x'_3}{c_2}-\frac{x'_2}{c_3}\right)+\frac{x_3}{c_1}\left(\frac{x'_3}{c_2}+\frac{x'_2}{c_3}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{x_3}{c_2}\left(\frac{x'_3}{c_1}+\frac{x'_1}{c_3}\right)+\frac{x_2}{c_3}\left(\frac{x'_3}{c_1}-\frac{x'_1}{c_3}\right)\right\}+\left(\frac{x_2}{c_3}+\frac{x_3}{c_2}\right)\left(\frac{x'_2}{c_3}+\frac{x'_3}{c_2}\right)=0.$$

429. Die Berührungspunkte liegen auf einer Kurve dritter Ordnung, welche durch die Ecken des Fundamentaldreiecks und durch den Punkt P geht. Die Gleichung derselben läßt sich auf die Form bringen:

$$\left(\frac{x_1^2}{a_1^2}-\frac{x_2^2}{a_2^2}\right)\frac{x_3x'_3}{a_3^2}+\left(\frac{x_2^2}{a_2^2}-\frac{x_3^2}{a_3^2}\right)\frac{x_1x'_1}{a_1^2}+\left(\frac{x_3^2}{a_3^2}-\frac{x_1^2}{a_1^2}\right)\frac{x_2x'_2}{a_2^2}=0.$$

430. Man erhält

$$\frac{u'_1}{k_1^2}u_1-\frac{u'_2}{k_2^2}u_2+k\left(\frac{u'_3}{k_3^2}u_3-\frac{u'_1}{k_1^2}u_1\right)=0.$$

Der geometrische Ort des Poles ist demnach eine gerade Linie.

431. Die Gleichung der gesuchten Kurve ist

$$a_3^2b_3x'_1x'_2+a_1^2b_1x'_2x'_3+a_2^2b_2x'_3x'_1=0.$$

Die Pole liegen demnach auf einem Kegelschnitte, welcher durch die Diagonalecken des dem Büschel zugehörigen Vierecks geht.

432. Die Mittelpunkte liegen auf einem Kegelschnitte, welcher der Gleichung

$$a_3^2x'_1x'_2\sin C+a_1^2x'_2x'_3\sin A+a_2^2x'_3x'_1\sin B=0$$

entspricht.

433. Man erhält

$$\frac{u_1}{k_1^2}-\frac{u_2}{k_2^2}+k\left(\frac{u_3}{k_3^2}-\frac{u_1}{k_1^2}\right)=0.$$

Der geometrische Ort ist demnach eine gerade Linie.

434. Der geometrische Ort der Berührungspunkte ist eine Kurve dritter Ordnung, deren Gleichung die Form

$$a_3^2x_1x_2(A_2x_1+A_1x_2)+a_1^2x_2x_3(A_3x_2+A_2x_3)$$
$$+a_2^2x_3x_1(A_1x_3+A_3x_1)=0$$

besitzt. Da diese Kurve den gegebenen Kegelschnitt im allgemeinen in sechs Punkten schneidet, so werden sechs Kegelschnitte des Büschels von dem gegebenen Kegelschnitt berührt werden.

435. Die Koordinaten der gemeinschaftlichen Tangenten lassen sich mit Hilfe der Gleichungen

$$B_3 u'_1 u'_2 + B_1 u'_2 u'_3 + B_2 u'_3 u'_1 = 0,$$
$$k_3^2 u'_1 u'_2 (B_2 u'_1 + B_1 u'_2) + k_1^2 u'_2 u'_3 (B_3 u'_2 + B_2 u'_3)$$
$$+ k_2^2 u'_3 u'_1 (B_1 u'_3 + B_3 u'_1) = 0$$

bestimmen. Der gegebene Kegelschnitt wird demnach im allgemeinen von sechs Kegelschnitten der Schar berührt werden.

436. Betrachtet man das gegebene Dreieck als Fundamentaldreieck und bezeichnet die Koordinaten des gegebenen Punktes P mit x'_1, x'_2, x'_3, so entspricht jeder Kegelschnitt der Gleichung

$$\frac{a_1}{a_2} x'^2_3 x_1^2 + x'^2_3 x_2^2 - \left(\frac{a_1}{a_2} x'^2_1 + x'^2_2\right) x_3^2 = 0.$$

Die Kegelschnitte bilden also ein Büschel. Die übrigen drei Fundamentalpunkte des Büschels lassen sich leicht bestimmen.

437. Man findet leicht, daß sich die gesuchte Gleichung auf die Form

$$\frac{k_1}{k_2} u'^2_3 u_1^2 + u'^2_3 u_2^2 - \left(\frac{k_1}{k_2} u'^2_1 + u'^2_2\right) u_3^2 = 0$$

bringen läßt, in der $\frac{k_1}{k_2}$ ein variabler Parameter ist. Die Kegelschnitte bilden demnach eine Schar.

438. Die Durchmesser bilden ein Strahlenbüschel erster Ordnung, welches der Gleichung

$$\frac{1}{a_1^2}(b_2 \sin C - b_3 \sin B) x_1 - \frac{1}{a_2^2}(b_3 \sin A - b_1 \sin C) x_2$$
$$+ f\left\{\frac{1}{a_3^2}(b_1 \sin B - b_2 \sin A) x_3 - \frac{1}{a_1^2}(b_2 \sin C - b_3 \sin B) x_1\right\} = 0$$

entspricht.

439. Die Gleichungen der vierten Harmonikalen sind:

$$a_{13} x_1 - a_{23} x_2 = 0, \quad a_{12} x_2 - a_{13} x_3 = 0, \quad a_{23} x_3 - a_{12} x_1 = 0.$$

Da die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_{13} & -a_{23} & 0 \\ 0 & a_{12} & -a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \end{vmatrix}$$

den Wert Null besitzt, so müssen diese Geraden sich in einem Punkte durchschneiden.

440. Die Gleichungen der vierten harmonischen Punkte sind:

$$\frac{u_1}{k_{23}} - \frac{u_2}{k_{31}} = 0, \quad \frac{u_2}{k_{31}} - \frac{u_3}{k_{12}} = 0, \quad \frac{u_3}{k_{12}} - \frac{u_1}{k_{23}} = 0.$$

Man ersieht sofort, daß diese drei Punkte in einer geraden Linie liegen.

441. Man erhält durch Elimination der variabeln Parameter f und k aus den Relationen

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} - f\left(\frac{x_1}{a_1} - \frac{x_2}{a_2}\right) = 0, \quad \frac{x_1}{a_1} + \frac{x_3}{a_3} - k\left(\frac{x_1}{a_1} - \frac{x_3}{a_3}\right) = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \sin A & \sin B & \sin C \\ \frac{1+f}{a_1} & \frac{1-f}{a_2} & 0 \\ \frac{1+k}{a_1} & 0 & \frac{1-k}{a_3} \end{vmatrix} = 0$$

die Gleichung des geometrischen Ortes:

$$\frac{x_2 x_3}{a_2^2 a_3^2} \sin A + \frac{x_3 x_1}{a_3^2 a_1^2} \sin B + \frac{x_1 x_2}{a_1^2 a_2^2} \sin C = 0,$$

d. h. der geometrische Ort ist ein dem Fundamentaldreieck umschriebener Kegelschnitt. Vergl. Lös. 432.

442. Die Gleichung des geometrischen Ortes lautet in diesem Falle

$$b_1 \frac{x_2 x_3}{a_2^2 a_3^2} + b_2 \frac{x_3 x_1}{a_3^2 a_1^2} + b_3 \frac{x_1 x_2}{a_1^2 a_2^2} = 0.$$

Welche Lage hat das Fundamentaldreieck, dem dieser Kegelschnitt umschrieben ist, zu dem von den Schenkeln der gegebenen Winkel gebildeten Vierseit?

443. Der geometrische Ort ist ein Kegelschnitt, die Gleichung desselben

$$a_1 b_1 x_1^2 + a_2 b_1 x_1 x_2 + a_1 b_3 x_1 x_3 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) x_2 x_3 = 0$$

(Mac Laurin). Durch welche von den gegebenen Punkten geht dieser Kegelschnitt?

444. Es seien g_1, g_2, g_3 die Seiten des Fundamentaldreiecks, und die Gleichungen der beiden gegebenen Punkte:

$$(P_1)\, a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 = 0, \quad (P_2)\, b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3 = 0,$$

dann ist die Gleichung der Enveloppe

$$a_1 b_1 u_1^2 + a_2 b_1 u_1 u_2 + a_1 b_3 u_1 u_3 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) u_2 u_3 = 0.$$

Das Strahlenbüschel gehört demnach der zweiten Ordnung an und wird von einem Kegelschnitte eingehüllt. Von welchen der gegebenen Geraden wird dieser Kegelschnitt berührt?

445. Es mögen die beiden festen Punkte, durch welche die drei Kegelschnitte gehen, Eckpunkte des Fundamentaldreiecks sein, dann lassen sich die Gleichungen der Kurven auf die Gestalt bringen:

$$a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{23}x_2x_3 + a_{31}x_3x_1 = 0,$$
$$a'_{11}x_1^2 + a'_{12}x_1x_2 + a'_{23}x_2x_3 + a'_{31}x_3x_1 = 0,$$
$$a''_{11}x_1^2 + a''_{12}x_1x_2 + a''_{23}x_2x_3 + a''_{31}x_3x_1 = 0;$$

demnach sind die Gleichungen der gemeinschaftlichen Sehnen:

$$(a_{11}a'_{23} - a'_{11}a_{23})x_1 + (a_{12}a'_{23} - a'_{12}a_{23})x_2 + (a_{31}a'_{23} - a'_{31}a_{23})x_3 = 0,$$
$$(a'_{11}a''_{23} - a''_{11}a'_{23})x_1 + (a'_{12}a''_{23} - a''_{12}a'_{23})x_2 + (a'_{31}a''_{23} - a''_{31}a'_{23})x_3 = 0,$$
$$(a''_{11}a_{23} - a_{11}a''_{23})x_1 + (a''_{12}a_{23} - a_{12}a''_{23})x_2 + (a''_{31}a_{23} - a_{31}a''_{23})x_3 = 0.$$

Es läßt sich leicht zeigen, daß diese drei Geraden durch einen Punkt gehen.

446. Haben drei Kegelschnitte zwei gemeinschaftliche Tangenten, so lassen sich an je zwei dieser Kurven zwei andere gemeinschaftliche Tangenten legen, deren Schnittpunkte in einer geraden Linie liegen.

447. Es sei die Gleichung des Kegelschnittsystems

$$a_{12}x_1x_2 + a_{23}x_2x_3 + a_{31}x_3x_1 + k(a_{23}x_1x_2 - a_{31}x_1^2) = 0.$$

In dem vorliegenden Falle läßt sich zur Bestimmung des Parameters k die Relation

$$a_{23}^2b_3^2k^2 + 2a_{23}b_3(a_{12}b_3 - a_{23}b_1 + a_{31}b_2)k$$
$$+ a_{12}^2b_3^2 + a_{23}^2b_1^2 + a_{31}^2b_2^2 - 2a_{12}a_{23}b_3b_1 - 2a_{21}a_{13}b_3b_2 - 2a_{13}a_{32}b_2b_1 = 0$$

aufstellen. Zwei Kegelschnitte des Systems werden demnach von der gegebenen Geraden berührt werden.

448. Die Gleichung des Kegelschnittsystems läßt sich auf die Form bringen

$$a_{12}x_1x_2 + a_{23}x_2x_3 + a_{31}x_3x_1 + k(a_{31}^2x_1^2 + 2a_{31}a_{23}x_1x_2 + a_{23}^2x_2^2) = 0.$$

Der geometrische Ort des Mittelpunktes entspricht in diesem Falle der Relation

$$x_1 : x_2 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \sin A \\ 0 & a_{23} & \sin B \\ a_{32} & 0 & \sin C \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_{13} & 0 & \sin A \\ a_{23} & a_{21} & \sin B \\ 0 & a_{31} & \sin C \end{vmatrix}.$$

Die Mittelpunkte liegen demnach alle auf einer Geraden, welche durch den gemeinschaftlichen Berührungspunkt aller Kegelschnitte hindurchgeht.

449. Die Polaren entsprechen der Gleichung

$$b_1 x'_3 x_1 + b_2 x'_3 x_2 + (b_1 x'_1 + b_2 x'_2) x_3 + k b_2 (x'_2 x_1 + x'_1 x_2) = 0;$$

d. h. sie bilden ein Strahlenbüschel erster Ordnung.

450. Betrachtet man in der vorhergehenden Aufgabe und Lösung $x_1, x_2, x_3; x'_1, x'_2, x'_3$ als homogene Linienkoordinaten, so erhält man das Resultat: die zugehörigen Pole liegen alle auf einer geraden Linie.

Hesse, Dr. **Otto,** weil. Professor am Königl. Polytechnikum zu München, **Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes,** insbesondere über Oberflächen zweiter Ordnung. Revidirt und mit Zusätzen versehen von Dr. S. Gundelfinger, a. o. Professor an der Universität zu Tübingen. Dritte Aufl. [XVI u. 546 S.] gr. 8. 1876. geh. n. ℳ 13.—

„Ungeachtet des bedeutenden Aufschwunges, welchen die analytische Geometrie namentlich im Verlaufe des letzten Vierteljahrhunderts einerseits durch die Erweiterung des Koordinatenbegriffes, andererseits durch die Fortschritte der algebraischen Methoden, besonders in der Theorie der Determinanten und der homogenen Funktionen, genommen hat, fehlte es doch noch bis vor kurzem an einem Lehrbuche, welches geeignet gewesen wäre, den Studierenden der Mathematik zur Einführung in diese neueren Disziplinen zu dienen. Für die analytische Geometrie der Ebene ist zu diesem Zwecke den deutschen Jüngern der Wissenschaft ein wichtiges Hilfsmittel in der Fiedlerschen Übertragung des Salmonschen Werkes in die Hand gegeben worden; für die des Raumes wird die erwähnte Lücke unserer mathematischen Litteratur auf eine ausgezeichnete Weise durch das vorliegende Lehrbuch ausgefüllt. Daß der Verfasser desselben vor allen berechtigt war, in diese Lücke einzutreten, dazu hat er sich den Anspruch durch seine rüstige Mitwirkung am Ausbau sowohl der analytisch-geometrischen Methoden, als der hiermit im Zusammenhange stehenden Teile der Algebra erworben; ein Blick in die letzten zwanzig Jahrgänge von Crelles Journal wird genügen, ihm diese Berechtigung zuzuerkennen. Gegenüber der Stellung des Verfassers auf dem Gebiete der Wissenschaft muß Referent von einer kritischen Besprechung des vorliegenden Werkes absehen, umsomehr, als dieselbe nur auf Anerkennung des darin dargelegten Talentes und der Meisterschaft in der Darstellungsweise hinauslaufen könnte — [Folgt Inhaltsangabe.] — Für Leser, welche mit den nötigen Vorkenntnissen ausgerüstet, Zugang zu den neueren analytisch-geometrischen Theorien erhalten wollen, kann das vorliegende Werk als eines der wichtigsten Hilfsmittel bezeichnet werden u. s. w."

[O. Fort in der Zeitschrift für Mathematik u. Physik.]

Hochheim, Dr. **Adolf,** Professor, **Aufgaben aus der analytischen Geometrie der Ebene.** Heft I. Die gerade Linie, der Punkt, der Kreis. gr. 8. 1882. geh. in 2 Abteilungen: A. Aufgaben. [79 S.] n. ℳ 1.50. B. Auflösungen. [102 S.] n. ℳ 1.50.

—— —— Heft II. **Die Kegelschnitte.** Abteilung I. Zwei Hefte. gr. 8. 1883. geh. n. ℳ 2.80. A. Aufgaben. [IV u. 76 S.] n. ℳ 1.20. B. Auflösungen. [93 S.] n. ℳ 1.60.

Salmon, George, analytische Geometrie der Kegelschnitte mit besonderer Berücksichtigung der neueren Methoden. Frei bearbeitet von Dr. Wilhelm Fiedler, Professor am eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich. Vierte Aufl. [XXIV u. 701 S.] gr. 8. 1878. geh. n. ℳ 14.40.

—— **analytische Geometrie der höheren ebenen Kurven.** Deutsch bearbeitet von Dr. Wilhelm Fiedler. Zweite verbesserte Aufl. [XVI u. 508 S.] gr. 8. 1882. geh. n. ℳ 11.20.

—— **analytische Geometrie des Raumes.** Deutsch bearbeitet von Dr. Wilhelm Fiedler. Dritte verbesserte Aufl. Zwei Theile. gr. 8. 1879. 1880. geh. n. ℳ 24.—

Einzeln:

I. Theil. **Die Elemente und die Theorie der Flächen zweiten Grades.** [XXXIII u. 362 S. mit Holzschnitten im Text.] 1879. n. ℳ 8.—

II. „ **Analytische Geometrie der Curven im Raume und der algebraischen Flächen.** [LXXII u. 686 S. mit Holzschnitten im Text.] 1880. n. ℳ 16.—